Thm Int. Mean value

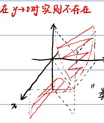
$\int_\Omega f\cdot g\,dV = \mu\int_\Omega g\,dV$ where $\mu\in[m,M]$，g不变号　f上下确界

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$ significant ☆ 反例

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & 0<x<y<1\\ -\frac{1}{x^2}, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{others}\end{cases}\qquad \int_0^1 f(x,y)\,dx=1 \qquad \int_0^1 f(x,y)\,dy=-1$$

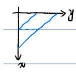
累次积分不相等，h(x)在 $y\to 0$ 时实则不存在

$x\to 0$ and $y\to 0$ 时



"类似Cauchy主值"

不是所有重积分可化为累次积分　Riemann

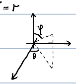


注意讨论（分段）

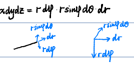
Some classic Transformation of Coordinates　proof: $\Delta u\Delta v \longrightarrow \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\end{vmatrix}$

$x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$　$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = abr$　以及 极：$J=r$

$x=r\sin\varphi\cos\theta$　$y=r\sin\varphi\sin\theta$　$z=r\cos\theta$　$J=r^2\sin\varphi$ (xabc)



$dx\,dy\,dz = r\,d\varphi\cdot r\sin\varphi\,d\theta\cdot dr$



叙述：因为Ω关xx平面对称，then $\iiint_\Omega xy\,dx\,dy\,dz=0$

Significance：变量代换取值范围

曲面面积（此前仅可计算直面）

$S=\iint_D \|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\|\,du\,dv = \iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \iint_D\sqrt{1+(-\frac{H_x}{H_z})^2+(-\frac{H_y}{H_z})^2}\,dx\,dy$　记：法向量☆

第二类积分

$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds = \int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$　‖ 切向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$（注意方向性）

$\iint_\Sigma \vec{F}\,d\vec{s} = \underbrace{\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS}_{\text{小心对称性}} = \iint_\Sigma P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dy\,dz$　‖ 法向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\longrightarrow\left(\frac{\partial y,z}{\partial u,v},\frac{\partial z,x}{\partial u,v},\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)$ 且归一化

一定要注意正负号☆

$= \iint_D \left(P\frac{\partial y,z}{\partial u,v}+Q\frac{\partial z,x}{\partial u,v}+R\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)du\,dv$ → u.v可以是x.y

方法：求法向量☆

Green　$\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D \nabla\times\vec{F}\,dx\,dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy$

路径无关：$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$；$dU=P\,dx+Q\,dy$　构造 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$ 可用于求面积、　同理求体积

Gauss　$\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot d\vec{s}$ which means $\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$

"面"无关

Stokes　$\int_{\partial\Sigma}P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_\Sigma\begin{vmatrix}dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$　注意方向，看清是否封闭

证否一致收敛：取 $y=\frac{1}{k}$，A=K　Greatly Significant 检验瑕点、☆

$\int_0^{+\infty}e^{-sx}\sin x\,dx=\frac{1}{1+s^2}$，$\int_0^{+\infty}e^{-sx}\cos x\,dx=\frac{s}{1+s^2}$

积分下可求导：$f$、$f_y$ 连续，$\int f\,dx$ 收敛，$\int f_y\,dx$ 一致收敛

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$，$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi$　作变换：$x=\frac{u}{1+u}$，$x=\frac{1}{1+t}$ → $\int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$

$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$　$(\Gamma(n+1)=n!)$　$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$　$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}t^{2s-1}e^{-t^2}dt$

$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ⟶ 常用

余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$

Euler intergral variant：(hint) 设分母 $=u$ or $\frac{1}{u}$，目标是把积分上下限改为 $\int_0^1$

练、　Significance：4.1 & 4.2 习题

P253 (9) $\iiint_\Omega\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$　$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$（计算题）$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$

P272 (4) 面积：$(\frac{x}{h}+\frac{y}{k})^4=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$　h、k、a、b、x、y > 0　$\frac{hk(a^2k^2+b^2h^2)}{6a^2b^2}$

P305 14.1.7　$I=\iint_\Sigma\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS$ where $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（计算题）$\frac{4}{3}abc\pi(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$

(2) 锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2(z\geqslant 0)$ 被平面 $x+y+z=2a(a>0)$ 所截的部分；　$8\sqrt{3}\pi a^2$

(5) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy(a>0)$ 内的那部分；（偏计算）$\frac{1}{9}(20-3\pi)a^2$

(6) $\iint_\Sigma(x^3+y^2+z)\,dS$，其中 Σ 是抛物面 $2z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=8$ 之间的部分；（计算）$\frac{1564\sqrt{17}+4}{15}\pi$

例 14.2.5　计算 $\iint_\Sigma x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$，其中 Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$z\geqslant 0(a,b,c>0)$，方向取上侧（见图 14.2.8）。

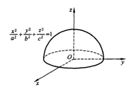



图 14.2.8

$\frac{2}{5}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$

易错

(8) $\iint_\Sigma\frac{1}{x}dy\,dz+\frac{1}{y}dz\,dx+\frac{1}{z}dx\,dy$，其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，方向取外侧；　just 球坐标系、　$\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

(3) $\iint_\Sigma(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$，其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h(h>0)$ 之间的部分，方向取下侧；　$-\frac{\pi h^4}{2}$　用两种方法

(8) $\iint_\Sigma\frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 Σ 是

i) 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取外侧；　$4\pi$

ii) 抛物面 $1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}$　$(z\geqslant 0)$，方向取上侧。　$2\pi$

例 14.3.10　计算 $I=\int_L(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中 L 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx(z\geqslant 0)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2rx(R>r>0)$ 的交线，从 z 轴的正向看去，是逆时针方向（图 14.3.20）。

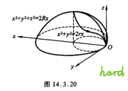



图 14.3.20

$2\pi r^2R$

hard & interesting