

大作业：线性代数知识整理

薛翔元

2021 年 12 月

目录

1 矩阵	3
1.1 常用矩阵	3
1.2 加法和数乘	3
1.3 矩阵乘法	3
1.4 转置	3
1.5 方阵的迹	4
1.6 方阵的幂	4
1.7 方阵多项式	5
1.8 初等变换	5
1.9 分块	5
2 行列式	6
2.1 逆序数	6
2.2 行列式	6
3 逆矩阵	8
3.1 伴随矩阵	8
3.2 可逆矩阵	9
4 线性方程组	10
4.1 (简化) 阶梯形矩阵	10
4.2 相抵标准形	10
4.3 矩阵的秩	10
4.4 线性方程组	11
4.5 解空间	12
4.6 Cramer 法则	13
5 相似矩阵	13
5.1 特征值与特征向量	13
5.2 代数重数与几何重数	15
5.3 相似变换	15
5.4 Jordan 标准形	17
5.5 最小多项式	17

6 对称矩阵	18
6.1 二次型	18
6.2 合同变换	18
6.3 惯性指数	19
6.4 正定	20
6.5 向量内积	21
6.6 共轭	21
6.7 正交	22
6.8 正交相似	23
7 线性空间	23
7.1 线性空间	23
7.2 基与坐标	24
7.3 同构	25
7.4 线性变换	25
7.5 欧氏空间	26

1 矩阵

1.1 常用矩阵

例如：零矩阵 O 、对角矩阵、单位矩阵 E 、纯量矩阵、上（下）三角矩阵、（反）对称矩阵、列（行）向量

常用矩阵有以下常见结论

- 上（下）三角矩阵的乘积仍为上（下）三角矩阵（有形似“攀爬”的幂次特性）
- 设 A, B 为对称矩阵，则 AB 为对称矩阵当且仅当 A, B 可交换（即 $AB = BA$ ）
- 若 A 为反对称矩阵， B 为对称矩阵，则
 - A^2 为对称矩阵
 - $AB - BA$ 为对称矩阵
 - AB 为反对称矩阵当且仅当 A, B 可交换（即 $AB = BA$ ）

1.2 加法和数乘

将矩阵相应位置上的数字分别相加/数乘，合称矩阵的**线性运算**，具有线性运算的一切性质（加法交换、加法结合、零元、负元、数乘交换、数乘结合、数乘分配）

1.3 矩阵乘法

记为 $C = A \times B$ ，满足 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ ，且 A 的列数必须等于 B 的行数

可从多种角度解释矩阵乘法

- c_{ij} 是 A 中第 i 个行向量和 B 中第 j 个列向量的内积
- C 的行向量是由 A 中相应行对 B 中行向量的线性组合
- C 的列向量是由 B 中相应列对 A 中列向量的线性组合
- A 是对 B 行向量组的线性变换
- B 是对 A 列向量组的线性变换

矩阵乘法具有结合律和分配律，但一般情况下不具有交换律和消去律

1.4 转置

记为 $B = A^T$ ，满足 $b_{ij} = a_{ji}$ ，任何矩阵都可以转置

转置具有如下基本性质

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$ (对于多个矩阵有相似结论)

任意方阵都可表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和, 且表示唯一

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

1.5 方阵的迹

方阵主对角线上元素之和称为**方阵的迹**, 记作 $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

矩阵的迹具有如下性质

- $tr(A^T) = tr(A)$
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(kA) = k \cdot tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

1.6 方阵的幂

方阵的幂是递归定义的, 只有方阵可以进行幂运算

$$A^k = \begin{cases} E_n & k=0 \\ A & k=1 \\ AA^{k-1} & k \geq 1 \end{cases}$$

某些方阵的幂有简便计算方法

- 若 $A^u = \lambda E$, 可将 A^k 分解, 只要计算 A 低于 u 次的幂即可
- 若 $A = \lambda E + B$, 且 $B^u = O$ (例如上三角矩阵), 可用二项式定理展开, 计算非零项
- 若 $A = PQ$, 且 QP 为特殊矩阵 (如单位阵), 有 $(PQ)^k = P \underbrace{(QP)(QP)\dots(QP)}_{(k-1)\text{个}} Q$

例 1.6.1 计算 $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n$

解 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 有 $A^n = \begin{cases} E & n = 0 \\ 4^{n-1}A & n \geq 1 \end{cases}$,

则 $M = (2E - A)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (2E)^{n-k} (-A)^k = \begin{cases} 4^k (2E - A) & n = 2k + 1 \\ 4^k E & n = 2k \end{cases}$

例 1.6.2 计算 $M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n$

解 令 $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, 假设 $A^k = \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}$,

则 $A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{pmatrix}$

由数学归纳法可知: $M = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$

1.7 方阵多项式

对于多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_sx^s \in \mathbb{K}[x]$, 方阵 A 可以代入, 使 $f(A) = a_0 + a_1A + \dots + a_sA^s$ 成为关于 A 的多项式

1.8 初等变换

定义如下三类行初等变换

- 交换第 i 行和第 j 行, 对应初等矩阵 $E(i, j)$
- 将第 i 行元素乘以 k , 对应初等矩阵 $E(i(k))$
- 将第 j 行的 k 倍加到第 i 行, 对应初等矩阵 $E(i, j(k))$

列初等变换完全类似, 区别在于左乘和右乘

1.9 分块

任意矩阵可以写成分块形式, 分块矩阵与数值矩阵具有完全相同的运算规律, 在一些问题中可以简化运算

关于分块矩阵有如下常见推论

- 若有分块对角矩阵 $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$, 则 $AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n)$
- 若有分块对角矩阵 $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, 则 $A^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_n^{-1})$
- 若有分块对角矩阵 $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, 则 $|A| = \prod_{i=1}^n |A_i|$
- 若 m 阶方阵 A 和 n 阶方阵 B 均可逆, 则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

- 若 m 阶方阵 A 和 n 阶方阵 B 均可逆, 则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = (-1)^{mn}|A||B| \begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$
- 若有分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} E_m & A_{12} \\ A_{21} & E_n \end{pmatrix}$, 则 $|E_n - A_{21}A_{12}| = |E_m - A_{12}A_{21}|$
- 若 A, D 为可逆矩阵, 则 $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A - BD^{-1}C||D|$
- 若 A, B 为 n 阶方阵, 则 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = |A + B||A - B|$
- 第一降秩定理: 若 A, D 为方阵, 则 $r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} r(A) + r(D - CA^{-1}B), & \text{若 } A \text{ 可逆} \\ r(D) + r(A - BD^{-1}C), & \text{若 } D \text{ 可逆} \end{cases}$
- 第二降秩定理: 若 A, D 为方阵, 则 $r(A) + r(D - CA^{-1}B) = r(D) + r(A - BD^{-1}C)$

例 1.9.1 设 A 为 n 阶可逆矩阵, α 为 n 维列向量, 求证: $|A - \alpha\alpha^T| = (1 - \alpha^T A^{-1}\alpha)|A|$

证 利用分块矩阵的结论, $|A - \alpha\alpha^T| = |A(E_n - A^{-1}\alpha\alpha^T)| = |A||E_n - (A^{-1}\alpha)\alpha^T| = |A||E_1 - \alpha^T(A^{-1}\alpha)| = (1 - \alpha^T A^{-1}\alpha)|A|$

例 1.9.2 设 A 为 n 阶方阵, $\lambda \neq 0$, 求证: $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$

证 利用分块矩阵的结论, $|\lambda E - AB| = |\lambda(E - \frac{A}{\lambda}B)| = \lambda^n |E - \frac{A}{\lambda}B| = \lambda^n |E - B\frac{A}{\lambda}| = |\lambda(E - B\frac{A}{\lambda})| = |\lambda E - BA|$

2 行列式

2.1 逆序数

在 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 中, 若 $j < k$ 且 $i_j > i_k$, 则 (i_j, i_k) 构成**逆序**, 排列中逆序的总数称为**逆序数**, 依据逆序数的奇偶性, 排列分为**奇排列**和**偶排列**

逆序数有如下性质

- 对换改变排列的奇偶性
- 所有 n 级排列中, 奇排列和偶排列数量相等, 都为 $\frac{n!}{2}$
- 任意 n 级排列中, 顺序数与逆序数之和为 $\frac{n(n-1)}{2}$

例 2.1.1 设 n 阶排列 $a_1 a_2 \dots a_n$ 的逆序数为 s , 求排列 $a_n a_{n-1} \dots a_1$ 的逆序数

解 由逆序数的性质, $a_n a_{n-1} \dots a_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - s$

2.2 行列式

方阵的**行列式**定义为 $|A| = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$, 也记作

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

另一方面，行列式也有递归定义（通过按行按列展开），两种定义可以推导出一致的自治体系

行列式具有如下性质

- 转置不改变行列式 $|A^T| = |A|$
- 行（列）线性性，即

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 初等变换（交换两行、某行乘以 k 、某行的 k 倍加到另一行）不改变行列式
- 按行（列）展开 $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ （其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式）
- Laplace 定理：在 $|A|$ 中取第 i_1, i_2, \dots, i_k 行与第 j_1, j_2, \dots, j_k 列，交点上 k^2 个元素组成子式 M ，剩余元素组成余子式 M' ，其代数余子式记为 A ，则 $D = \sum_{i=1}^t M_i A_i$ ($t = C_n^k$)
- 乘积的行列式等于行列式的乘积 $|AB| = |A||B|$

依据定义直接展开以外，行列式有如下求解技巧

- 三角化求对角线乘积

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 b^2 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 b^2$$

- 初等变换构造爪型行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ c_2 & b_2 & & & \\ c_3 & & b_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & b_n \end{vmatrix} = (a_1 - \sum_{j=2}^n \frac{a_j c_j}{b_j}) b_2 b_3 \cdots b_n$$

- 按行（列）展开或 Laplace 定理降阶

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix} = (-1)^{(1+3)+(1+3)} \begin{vmatrix} a & b \\ y & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ w & z \end{vmatrix} = (ax - by)(cz - dw)$$

- 镶边法辅助化简

$$\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x & -y & -z \\ 0 & a+x & a+y & a+z \\ 0 & b+x & b+y & b+z \\ 0 & c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x & x-y & x-z \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- 构造递推关系或数学归纳

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = (x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) D_{n-1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

例 2.2.1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 由行列式的定义, $D = (-1)^{\tau(13\dots n2)} a_{11} a_{23} \cdots a_{n2} = (-1)^{n-2} n!$

3 逆矩阵

3.1 伴随矩阵

在 A 中, 记 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 定义伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

伴随矩阵具有如下性质

- $AA^* = |A|E$
- $|A^*| = |A|^{n-1}$
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{A}{|A|}$
- $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

3.2 可逆矩阵

若存在 B , 使 $AB = BA = E$, 则 A 为可逆矩阵, B 为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1}

矩阵 A 可逆有如下等价命题

- $|A| \neq 0$ (A 为非奇异矩阵)
- A 可写成若干个初等矩阵乘积
- A 与单位阵 E 相抵
- $r(A) = n$ (A 满秩)
- A 的行 (列) 向量组线性无关
- A 行 (列) 满秩
- 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解
- 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有唯一解
- A 的特征值均不为 0
- 任意 n 维向量可由 A 的行 (列) 向量组线性表示

矩阵求逆有如下方法

- 伴随矩阵法 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$
- 初等变换法: 构造矩阵 (A, E) , 做初等变换化为 (E, A^{-1})
- 多项式法: 若 $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = O$, 且 $a_0 \neq 0$, 则 $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_m A^{m-1} + a_{m-1} A^{m-2} + \cdots + a_1 E)$

矩阵的逆有如下性质

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

例 3.2.1 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $A, B, A+B$ 均可逆, 求证: $(A+B)^{-1} = A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1}$
证 由逆矩阵的性质, $(A+B)^{-1} = (B(B^{-1}A + E))^{-1} = (B(B^{-1} + A^{-1})A)^{-1} = A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1}$

例 3.2.2 设 A 为 n 阶方阵, $A^2 = 2A$ 但 $A \neq 2E$, 求证: A^* 不可逆

证 (反证) 假设 A^* 可逆, 则 A 也可逆, 在 $A^2 = 2A$ 两侧同时右乘 A^{-1} 得到 $A = 2E$, 矛盾! 因此 A^* 不可逆

例 3.2.3 设 A 为 5 阶方阵, 且 $|A| = 2$, 试求: $|(2A)^{-1} + 3A^*|$

解 由伴随矩阵和逆矩阵的性质, $|A|| (2A)^{-1} + 3A^* | = |\frac{1}{2}E + 3|A|E| = |\frac{13}{2}E| = \frac{13^5}{32}$
因此 $|(2A)^{-1} + 3A^*| = \frac{13^5}{64}$

例 3.2.4 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = 4A$, 令 $B = A^2 - 5A + 6E$, 求证: B 为可逆矩阵

证 注意到 $\frac{1}{12}B(A + 2E) = \frac{1}{12}(-A + 6E)(A + 2E) = E$, 因此 $B^{-1} = \frac{1}{12}(A + 2E)$

4 线性方程组

4.1 (简化) 阶梯形矩阵

所有非零行位于全零行之前, 且非零行最左边非零元素的列号严格递增的矩阵称为**行阶梯形矩阵**, 各非零行中最左边的非零元素称为主元, 若行阶梯形矩阵每个主元都是 1, 且各个主元所在列的其余元素都是 0, 则称其为**简化行阶梯形矩阵**, 任一矩阵都可经过行初等变换化为行阶梯形矩阵或简化行阶梯形矩阵

4.2 相抵标准形

若矩阵 A 可以经过一系列初等变换化为 B , 则称矩阵 A 与 B **相抵**. 简化行阶梯形矩阵可经过列初等变换化为**相抵标准形** $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 故任一 $m \times n$ 矩阵都有唯一的相抵标准形, 即存在 m 阶初等矩

阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t , 使得 $P_s P_{s-1} \dots P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_t = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ (其中 r 为矩阵的秩)

4.3 矩阵的秩

设 A 为数域 \mathbb{K} 上的 $m \times n$ 阶矩阵, 若 A 中有一个 r 阶子式不等于零而所有高于 r 阶的子式都等于零, 则定义 r 为 A 的**秩**, 记作 $r(A) = r$, 若 A 为零矩阵, 则其秩为零, 记作 $r(O) = 0$, 若 $r(A) = m$, 称 A 为行满秩矩阵, 若 $r(A) = n$, 称 A 为列满秩矩阵, 若 $r(A) = m = n$, 称 A 为**满秩矩阵**

矩阵的秩等于

- 对应行阶梯矩阵中非零行的个数
- 相抵标准形左上角单位矩阵的阶数
- 非零特征值的个数

矩阵的秩具有如下性质

- $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$ (m, n 为矩阵行数和列数)
- $r(A) = r(A^T)$
- 初等变换不改变矩阵的秩 (相抵矩阵的秩相等)
- $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
- $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(A) = r(AA^T) = r(A^T A)$
- 若 $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

方程组的解有以下情况

- 若 $b_{r+1} \neq 0$, 则原方程组无解
- 若 $b_{r+1} = 0$ 且 $r = n$, 则原方程组有唯一解
- 若 $b_{r+1} = 0$ 且 $r < n$, 则原方程组有无穷多解

对于齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$, 若未知数与方程个数相等, 即 A 为方阵, 有如下判定

- 方程组只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$

对于非齐次线性方程组 $Ax = \beta$, 若未知数与方程个数相等, 即 A 为方阵, 有如下判定

- 方程组有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}) < n \Leftrightarrow |A| = 0$

例 4.4.1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 求证:

- (1) $Ax = \mathbf{0}$ 与 $A^T Ax = \mathbf{0}$ 同解
- (2) $r(A) = r(A^T A)$

证 (1) 一方面, $\forall x: Ax = \mathbf{0}$, 有 $A^T Ax = \mathbf{0}$, 另一方面, $\forall x: A^T Ax = \mathbf{0}$, 有 $x^T A^T Ax = (Ax)^T Ax = (Ax, Ax) = 0$, 即 $Ax = \mathbf{0}$, 因此 $Ax = \mathbf{0}$ 与 $A^T Ax = \mathbf{0}$ 同解

(2) $Ax = \mathbf{0}$ 与 $A^T Ax = \mathbf{0}$ 中未知数个数均为 n , 由 (1) 可知它们同解, 有相同的基础解系, 则基础解系中向量个数均为 k , 因此 A 和 $A^T A$ 的秩均为 $r = n - k$, 即 $r(A) = r(A^T A)$

例 4.4.2 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 求证: 方程组 $Ax = \beta$ 有解当且仅当 $A^T y = \mathbf{0}$ 的任一解向量都是 $\beta^T y = 0$ 的解向量

证 方程组 $Ax = \beta$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r\left(\begin{matrix} A & \beta \end{matrix}\right) \Leftrightarrow r(A^T) = r\left(\begin{matrix} A^T \\ \beta^T \end{matrix}\right) \Leftrightarrow \beta^T$ 可由 A^T 的行向量组线性表示 $\Leftrightarrow A^T y = \mathbf{0}$ 与 $\left(\begin{matrix} A^T \\ \beta^T \end{matrix}\right) y = \mathbf{0}$ 同解 $\Leftrightarrow A^T y = \mathbf{0}$ 的任一解向量都是 $\beta^T y = 0$ 的解向量

4.5 解空间

齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 全体解向量构成的集合 $W = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid A\alpha = \mathbf{0}\}$ 称为**解空间**, 它的一组基称为一个**基础解系**, 若 A 的阶数为 n , 秩为 r , 则基础解系中向量个数为 $n - r$, 记为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$, 任意解向量 η 均可表示为它们的线性组合 $\eta = \sum_{j=1}^{n-r} k_j \eta_j$

对于非齐次线性方程组 $Ax = \beta$, 与之对应的齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 称为**导出方程组**, 若 $Ax = \beta$ 有解, 且一个特解为 γ_0 , 则其任意解向量 γ 均可表示为 $\gamma = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-r} k_j \eta_j$

因此, 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的解空间 $W = \left\{ \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-r} k_j \eta_j \mid k_j \in \mathbb{K}, 1 \leq j \leq n - r \right\}$

例 4.5.1 已知 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $Ax = \beta (\beta \neq \mathbf{0})$ 的两个不同的解, α_1, α_2 为齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系, 求 $Ax = \beta$ 的通解

解 由非齐次线性方程组解空间的结构, 通解可表示为 $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$

4.6 Cramer 法则

数域 \mathbb{K} 上 n 个方程构成的 n 元线性方程组 $Ax = \beta$, 若 $|A| \neq 0$, 则方程组有唯一解且为 $x_j = \frac{D_j}{D}$ ($1 \leq j \leq n$), 其中 $D = |A|$, D_j 是将 A 的第 j 列用列向量 $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 替换所得的 n 阶行列式

Cramer 法则揭示了行列式和线性方程组的联系, 具有极高理论价值, 但由于求解行列式复杂度极高, 求解线性方程组一般不采用 Cramer 法则

5 相似矩阵

5.1 特征值与特征向量

设 A 为 n 阶方阵, α 为 n 维非零向量, 若 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则称 λ 为 A 的一个**特征值**, α 为 A 的属于特征值 λ 的**特征向量**, $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 为 A 的**特征多项式**

若 λ_0 为 A 的一个特征值, 则属于 λ_0 的特征向量的任意非零线性组合也是属于 λ_0 的特征向量, 它们构成 λ_0 的**特征子空间** V_{λ_0}

n 阶方阵 A 的特征值和特征向量求法

1. 计算 A 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ ($f(\lambda)$ 一定是首项为 1 的 n 次多项式)
2. 求解一元 n 次方程 $f(\lambda) = 0$, 求出 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
3. 对于每个特征值 λ_i , 求解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = \mathbf{0}$, 求出一个基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 即给出属于 λ_i 的所有特征向量

方阵的特征值与特征向量具有如下性质

- 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = \text{tr}(A)$, $\prod_{j=1}^n \lambda_j = |A|$
- 转置不改变特征多项式 $|\lambda E - A^T| = |\lambda E - A|$
- 若 λ 为方阵 A 的特征值, α 为属于 λ 的特征向量, 则
 - $k\lambda$ 为 kA 的特征值, α 为属于 $k\lambda$ 的特征向量
 - λ^m 为 A^m 的特征值, α 为属于 λ^m 的特征向量
- 设 λ 为可逆矩阵 A 的特征值, α 为属于 λ 的特征向量, 则
 - $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值, α 为属于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量
 - $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值, α 为属于 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量
- 设 $\varphi(x)$ 为多项式, A 为 n 阶方阵, 若 λ 为 A 的特征值, α 为属于 λ 的特征向量, 则 $\varphi(\lambda)$ 为 $\varphi(A)$ 的特征值, α 为属于 $\varphi(\lambda)$ 的特征向量
- 方阵 A 中属于不同特征值的特征向量线性无关
- 方阵 A 中不同特征值的特征子空间的基线性无关

例 5.1.1 设 α 是对称矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 试求矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 的属于特征值 λ 的特征向量

解 注意到 $(P^{-1}AP)^T(P^T\alpha) = P^T A(P^T)^{-1}P^T\alpha = P^T A\alpha = \lambda(P^T\alpha)$, 所求特征向量即为 $P^T\alpha$

例 5.1.2 设 A 为 n 阶方阵, 满足 $AA^T = E$, 且 $|A| < 0$, 求证: -1 为 A 的一个特征值

证 设 λ 为一个特征值, α 为对应特征向量, 有 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $\alpha^T A^T = \lambda\alpha^T$, 则 $\alpha^T A^T A\alpha = \alpha^T \lambda\alpha = \lambda^2 \alpha^T \alpha$, 可知 $\lambda^2 = 1$, 又 $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i = -1$, 因此 -1 必为 A 的一个特征值

例 5.1.3 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 且 $r(A) = 1$, 求证: A 的 n 个特征值为 $\lambda_1 = tr(A)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$

证 由 $r(A) = 1$, 可知存在 n 维列向量 α, β 使 $A = \alpha\beta^T$, 则 $|\lambda E - A| = |\lambda E - \alpha\beta^T| = \lambda^n |E - \frac{1}{\lambda}\beta^T\alpha| = \lambda^{n-1}(\lambda - tr(A))$, 因此 A 特征值为 $\lambda_1 = tr(A)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$

例 5.1.4 设 A 为 n 阶方阵, 任意 n 维非零列向量都是 A 的特征向量, 求证: A 为纯量矩阵

证 取列向量 $\epsilon_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 有 $A\epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$, 可知 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 再取 $\alpha_{ij} = \epsilon_i + \epsilon_j$, 有 $A(\epsilon_i + \epsilon_j) = \lambda_i \epsilon_i + \lambda_j \epsilon_j$, 可知 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$, 因此 $A = \lambda E$ 为纯量矩阵

例 5.1.5 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 A 有 n 个互异特征值, 求证: $AB = BA$ 的充要条件是 A 的特征向量也为 B 的特征向量

证 “ \Rightarrow ”: 设 α 为 A 的特征向量, 对应特征值为 λ , 有 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $BA\alpha = A(B\alpha) = \lambda(B\alpha)$, 若 $B\alpha = 0$, 则 $B\alpha = 0 \cdot \alpha$, 故 α 为 B 的特征向量, 若 $B\alpha \neq 0$, 则 $B\alpha$ 也为 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 又 λ 的代数重数为 1, 可知 α 与 $B\alpha$ 线性相关, 即 $B\alpha = \mu\alpha$, 故 α 为 B 的特征向量, 因此 A 的特征向量也为 B 的特征向量

“ \Leftarrow ”: 由 A 有 n 个互异特征值, 可知存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = U$, 其中 U 为 A 的特征值构成的对角阵, 又 A 的特征向量也为 B 的特征向量, 可知 $P^{-1}BP = V$, 其中 V 为 A 的特征值构成的对角阵, 故 $AB = (PUP^{-1})(PVP^{-1}) = PUV P^{-1} = PVUP^{-1} = (PVP^{-1})(PUP^{-1}) = BA$

例 5.1.6 设 A 为 n 阶对合矩阵, 即 $A^2 = E$, 且特征值均为 1, 求证: $A = E$

证 由题可知 $(E + A)(E - A) = O$, 则 A 的特征值只能为 ± 1 , 又 -1 不为 A 的特征值, 有 $|-E - A| = (-1)^n |E + A| \neq 0$, 可知 $E + A$ 可逆, 在等式两侧左乘 $(E + A)^{-1}$ 有 $E - A = O$, 因此 $A = E$

例 5.1.7 试求方阵 $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ 的特征值

解 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = E$, 再令 $\varphi(x) = a + bx + cx^2$, 则 $B = \varphi(A)$,

而 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1 = 0$, 可知 A 的特征值为 $1, \omega, \omega^2$, 则 B 的特征值为

$\varphi(1) = a + b + c$, $\varphi(\omega) = a + b\omega + c\omega^2$, $\varphi(\omega^2) = a + b\omega^2 + c\omega$

例 5.1.8 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $0, 1, 2, \dots, n-1$, 试求 $A + 2E$ 的特征值与行列式

解 由 $\varphi(A) = A + 2E$ 为 A 的多项式, 可知 $\varphi(A)$ 的相应特征值为 $\varphi(x)$, 故 $A + 2E$ 的特征值为 $2, 3, 4, \dots, n+1$, 行列式 $|A + 2E| = (n+1)!$

例 5.1.9 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, 试求 A^n

解 计算求得 A 的特征值 $\lambda_1 = a + b, \lambda_2 = a - b$, 对应特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, 因此 $A^n = P \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}^n P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}$

例 5.1.10 设 $x_0 = 2, y_0 = 1$, 且 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = 4x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases} (n \in \mathbb{N})$, 试求 x_{100}

解 将方程组简化为矩阵形式 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, 由递推关系有 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 计算求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$, 对应特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 因此 $\begin{pmatrix} x_{100} \\ y_{100} \end{pmatrix} = A^{100} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{100} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^{100} + 1 \\ 2 \cdot 5^{100} - 1 \end{pmatrix}$, 故 $x_{100} = 5^{100} + 1$

5.2 代数重数与几何重数

若 λ_0 为方阵 A 的一个 m 重特征值, 则称 m 为 λ_0 的**代数重数**, 若特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 d (即方程组 $(\lambda_0 E - A)x = \mathbf{0}$ 基础解系向量个数为 d), 则称 d 为 λ_0 的**几何重数**

重要性质 若 λ_0 为方阵 A 的一个特征值, 则 λ_0 的几何重数不大于代数重数

5.3 相似变换

设 A, B 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 T 使 $B = T^{-1}AT$, 则称方阵 A, B **相似**, 记作 $A \sim B$

根据方阵的相似关系, 定义等价类内封闭的**相似变换** $\varphi: A \mapsto T^{-1}AT$

相似关系是一种等价关系, 即相似关系具有以下性质

- 自反性: $A \sim A$
- 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$
- 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$

相似矩阵具有如下性质

- 相似矩阵有相同的迹
- 相似矩阵有相同的秩
- 相似矩阵有相同的行列式
- 相似矩阵有相同的特征多项式 (即有相同的特征值)

- 相似矩阵有相同的可逆性, 若可逆, 它们的逆矩阵也相似
- 设 A, B 为 n 阶方阵, 若 $A \sim B$, 则 $kA \sim kB, A^m \sim B^m, A^T \sim B^T$
- 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 A 可逆, 则 $AB \sim BA$
- 设 $\varphi(x)$ 为多项式, A, B 为 n 阶方阵, 若 $A \sim B$, 则 $\varphi(A) \sim \varphi(B)$
- 设分块对角矩阵 $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n), B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$, 若 $\forall i = 1, 2, \dots, n : A_i \sim B_i$, 则 $A \sim B$
- 若 $P^{-1}A_1P = B_1$ 且 $P^{-1}A_2P = B_2$, 则 $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2, A_1A_2 \sim B_1B_2$
- 相似矩阵有相同的 Jordan 标准形

若方阵 A 相似于某个对角矩阵, 则称 A 可以相似对角化, 有如下结论

- n 阶方阵 A 可相似对角化的充要条件
 - A 有 n 个线性无关的特征向量
 - A 的任一特征值的代数重数等于几何重数
 - A 的 Jordan 标准形是对角阵
 - A 的 Jordan 标准形中有 n 个 Jordan 块
 - A 的 Jordan 标准形中所有 Jordan 块均为一阶
 - A 的最小多项式 $m_A(x)$ 无重根
- n 阶方阵 A 可相似对角化的充分条件
 - A 有 n 个不同的特征值
 - A 为 n 阶幂等矩阵 (即 $A^2 = A$)

例 5.3.1 设 A 是秩为 r 的 n 阶幂等矩阵, 即 $A^2 = A$, 求证: A 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

证 由题可知 $(E - A)A = A(E - A) = O$, 则 A 的特征值只可能为 $0, 1$, 且 A 的非零列向量均为 $(E - A)x = O$ 的解向量, 也是属于特征值 1 的特征向量, 同理 $E - A$ 的非零列向量均为 $Ax = O$ 的解向量, 也是属于特征值 0 的特征向量, 而 $r(E - A) + r(A) \geq r(E - A + A) = r(E) = n$, 则 A 有 n 个线性无关的特征向量, 必相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

例 5.3.2 设 A 是秩为 r 的 n 阶幂等矩阵, 即 $A^2 = A$, 试求行列式 $|A + tE|$ 的值

解 由上例可知, 存在 n 阶可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 因此 $|A + tE| =$

$$\left| P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} + tE_n \right| = \left| P \begin{pmatrix} (t+1)E_r & O \\ O & tE_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1} \right| = \left| \begin{pmatrix} (t+1)E_r & O \\ O & tE_{n-r} \end{pmatrix} \right| = t^{n-r}(t+1)^r$$

例 5.3.3 设 n 阶方阵 A 有 n 个互异特征值, 且 $AB = BA$, 求证: B 可相似对角化

证 据 A 有 n 个互异特征值, 设为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 可知存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 又 $AB = BA$, 则 $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$, 即 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 可交换, 注意到与对角阵可交换的矩阵也为对角阵, 则 $P^{-1}BP$ 为对角阵, 故 B 可相似对角化

5.4 Jordan 标准形

定义 Jordan 块 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$, 其特征值为 λ_i , 相应代数重数为 m ,

几何重数为 1, 若干 Jordan 块组成 Jordan 标准形 $J = \begin{pmatrix} J_1 & O & \dots & O \\ O & J_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_n \end{pmatrix}$

记阶数为 m , 特征值为 λ_0 的 Jordan 块为 $J(m, \lambda_0)$, 有如下结论

- $J(m, \lambda_0)$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m$
- $J(m, \lambda_0)$ 不是多项式 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m-1}$ 的根, 即 $(J(m, \lambda_0) - \lambda_0 E)^{m-1} \neq O$
- 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $J(m, \lambda_1)$ 与 $J(m, \lambda_2)$ 不相似

不计 Jordan 块的排列顺序, 任意方阵 A 都相似于唯一的 Jordan 标准形, 每个 Jordan 标准形揭示一类相似矩阵的共同性质, 它有如下意义

- Jordan 标准形对角线上 n 个元素即为 n 个特征值
- Jordan 标准形对角线上 λ_i 出现的次数即为特征值 λ_i 的代数重数
- Jordan 标准形中对应 λ_i 的 Jordan 块个数即为特征值 λ_i 的几何重数
- Jordan 标准形对角线上 λ_i 出现的次数即为特征多项式中因式 $(\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$ 的次数 α_i
- Jordan 标准形中对应 λ_i 的 Jordan 块最大阶数即为最小多项式中因式 $(\lambda - \lambda_i)^{\beta_i}$ 的次数 β_i

5.5 最小多项式

设 $f(x)$ 为非零多项式, A 为 n 阶方阵, 若 $f(A) = O$, 则称 $f(x)$ 为 A 的**化零多项式**, A 的次数最低且最高次项系数为 1 的化零多项式称为 A 的**最小多项式**, 记作 $m_A(x)$

任意 n 阶方阵 A 均有次数不大于 n 的化零多项式 (特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$), 也有唯一的最小多项式

关于最小多项式有如下结论

- 最小多项式 $m_A(x)$ 整除方阵 A 的任意化零多项式 $f(x)$
- 相似的方阵有相同的最小多项式
- 设分块对角矩阵 $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$, 则 A 的最小多项式为各块最小多项式的最小公倍数, 即 $m_A(x) = [m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \dots, m_{A_s}(x)]$

- 设 $i = 1, 2, \dots, s$, 若 Jordan 块 $J_i = J(m_i, \lambda_i)$, Jordan 标准形 $J = \text{diag}(J(m_1, \lambda_1), J(m_2, \lambda_2), \dots, J(m_s, \lambda_s))$, 则 J 的最小多项式 $m_J(x) = [(x - \lambda_1)^{m_1}, (x - \lambda_2)^{m_2}, \dots, (x - \lambda_s)^{m_s}]$
- 方阵 A 的特征值必为最小多项式 $m_A(x)$ 的根

例 5.5.1 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 5A + 6E = O$, 求证: 存在非负整数 r, t 使 $r + t = n$, 且 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix} 2E_r & O \\ O & 3E_t \end{pmatrix}$

证 由题可知, $f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ 是 A 的化零多项式, 则 A 的最小多项式 $m_A(x)$ 无重根, 因此 A 相似于对角阵, 且 A 的特征值只能为 2, 3, 因此存在非负整数 r, t 使 $r + t = n$, 且 $A \sim \begin{pmatrix} 2E_r & O \\ O & 3E_t \end{pmatrix}$

例 5.5.2 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 5A + 6E = O$, 试求 A^{100}

解 设 $\lambda^{100} = q(\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) + a\lambda + b$, 令 $\lambda = 2$ 有 $2^{100} = 2a + b$, 令 $\lambda = 3$ 有 $3^{100} = 3a + b$, 解得 $a = 3^{100} - 2^{100}, b = -2 \cdot 3^{100} + 3 \cdot 2^{100}$, 因此 $A^{100} = q(A)(A^2 - 5A + 6E) + aA + bE = (3^{100} - 2^{100})A + (3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100})E$

例 5.5.3 求证: 矩阵 A 可逆的充要条件是 A 的最小多项式 $m_A(x)$ 的常数项不为 0

证 矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow$ 特征多项式 $f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$ 常数项不为 0

6 对称矩阵

6.1 二次型

设有 n 阶对称方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 和 n 维列向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ 称为一个二次型, 若 A 为对角阵, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2$ 只含平方项, 称为标准二次型, 若标准二次型中任一系数 $a_{ii} \in \{1, -1, 0\}$, 则称其为规范二次型

形如 $x = Cy$ 的变换称为线性替换, 若 C 为可逆矩阵, 则称其为非奇异线性替换, 任意二次型 $f = x^T A x$ 均可经过非奇异线性替换 $x = Py$ 化为标准二次型, 配方法是构造矩阵 P 的常见技巧

6.2 合同变换

设 A, B 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 C 使 $B = C^T A C$, 则称方阵 A, B 合同

根据方阵的合同关系, 定义等价类内封闭的合同变换 $\varphi: A \mapsto C^T A C$, 对称矩阵的合同变换与二次型的非奇异线性替换本质相同

合同关系是一种等价关系, 即合同关系具有以下性质

- 自反性: A 合同于 A
- 对称性: 若 A 合同于 B , 则 B 也合同于 A
- 传递性: 若 A 合同于 B , B 合同于 C , 则 A 也合同于 C

合同矩阵具有如下结论

- 若 A 合同于 B , 则 $r(A) = r(B)$ (合同变换不改变矩阵的秩)

- 若 A 合同于 B , 且 A 为对称矩阵, 则 B 也为对称矩阵 (二次型经非奇异线性替换仍为二次型)
- 对称矩阵可经合同变换化为对角阵 (二次型可经非奇异线性替换化为标准二次型)
- 对称矩阵 A 与 B 合同的充要条件
 - 存在可逆矩阵 C 使 $B = C^T A C$
 - A 与 B 对应二次型可经非奇异线性替换互化
 - A 与 B 的标准形有相同的正惯性指数和负惯性指数

6.3 惯性指数

设 $f = x^T A x$ 为实二次型, 其秩为 r , 若 f 的标准形中有 p 个正项, 则 p 为其**正惯性指数**, $q = r - p$ 为其**负惯性指数**, $s = p - q$ 为其**符号差**

定义的合理性依赖**惯性定理**: 二次型的所有标准形具有相同的正惯性指数 (负惯性指数、符号差)

因此, 任一秩为 r 的 n 阶实对称矩阵 A 具有唯一的**合同标准形** $M = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{pmatrix}$, 其中

p 为 A 的正惯性指数, q 为 A 的负惯性指数, 且有 $p + q = r$

依据合同关系对 n 阶实对称矩阵分类, 类数即为 n 阶合同标准形的个数 $N = \sum_{r=0}^n (r+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, 则 n 元实二次型类数也为 $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

例 6.3.1 求证: 二次型 f 的秩 r 与符号差 s 的奇偶性相同

证 由 $\begin{cases} r = p + q \\ s = p - q \end{cases}$, 可知 $r + s = 2p$ 为偶数, 因此 r 与 s 具有相同的奇偶性

例 6.3.2 求证: 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 能分解为两个实一次齐次式之积的充要条件是 $r(f) = 2$ 且符号差 $s = 0$ 或者 $r(f) = 1$

证 “ \Rightarrow ”: 设 $f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n)$, 考虑两种情形

情形一: 若 (a_1, a_2, \dots, a_n) 与 (b_1, b_2, \dots, b_n) 线性无关, 不妨设 a_1, a_2 与 b_1, b_2 不成比例, 可做非退

化线性替换 $\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n \\ y_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_n x_n \\ y_3 = x_3 \\ \dots \\ y_n = x_n \end{cases}$, 有 $f = y_1 y_2$, 再令 $\begin{cases} y_1 = z_1 - z_2 \\ y_2 = z_1 + z_2 \end{cases}$, 有

$f = z_1^2 - z_2^2$, 可知 $r(f) = 2$ 且 $s = p - q = 0$

情形二: 若 (a_1, a_2, \dots, a_n) 与 (b_1, b_2, \dots, b_n) 线性相关, 可设 $(b_1, b_2, \dots, b_n) = k(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则 $f = k(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^2$, 不妨设 $a_1 \neq 0$,

可做非退化线性替换 $\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n \\ y_2 = x_2 \\ \dots \\ y_n = x_n \end{cases}$, 有 $f = y_1^2$, 可知 $r(f) = 1$

至此, 必要性得证

“ \Leftarrow ”：同样分别考虑两种情形

情形一：若 $r(f) = 1$ ，则可做非退化线性替换
$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n \end{cases}, \text{ 此时}$$

$f = y_1^2 = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n)^2$ ，是两个实一次齐次式之积

情形二： $r(f) = 2$ 且 $s = p - q = 0$ ，则可做相同非退化线性替换 $y = Cx$ ，此时 $f = y_1^2 - y_2^2 = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n)^2 - (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n)^2 = [(c_{11} + c_{21})x_1 + \dots + (c_{1n} + c_{2n})x_n][(c_{11} - c_{21})x_1 + \dots + (c_{1n} - c_{2n})x_n]$ ，是两个实一次齐次式之积

至此，充分性得证

6.4 正定

设二次型 $f = x^T A x$ ，若对于任意非零向量 α ，均有 $\alpha^T A \alpha > 0$ （或 $\alpha^T A \alpha \geq 0$ ），则称 f 为**正定二次型**（或**半正定二次型**）， A 为**正定矩阵**（或**半正定矩阵**），若对于任意非零向量 α ，均有 $\alpha^T A \alpha < 0$ （或 $\alpha^T A \alpha \leq 0$ ），则称 f 为**负定二次型**（或**半负定二次型**）， A 为**负定矩阵**（或**半负定矩阵**），若 f 可正可负，则称 f 为**不定二次型**， A 为**不定矩阵**

矩阵与二次型的正定性有如下判定方法

- n 元实二次型 $f = x^T A x$ 正定的充要条件
 - f 的正惯性指数 $p = n$
 - f 的规范形为 $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$
 - 存在可逆矩阵 M 使 $M^T A M = E$ （即 A 合同于单位阵 E ）
 - 存在可逆矩阵 C 使 $A = C^T C$ （证明常用）
 - A 的各阶顺序主子式均大于零（计算常用）
- n 元实二次型 $f = x^T A x$ 半正定的充要条件是 f 的正惯性指数 $p = r(f) \leq n$
- n 元实二次型 $f = x^T A x$ 不定的充要条件是 f 的正惯性指数 p 满足 $0 < p < r(f)$
- 实二次型 f 负定的充要条件是 $-f$ 正定
- 实二次型 f 半负定的充要条件是 $-f$ 半正定

正定矩阵与正定二次型有如下常见结论

- 若 A, B 为正定矩阵，则 $\lambda A + \mu B$ 也为正定矩阵
- 若 A 为正定矩阵，则 A^2, A^3, \dots, A^m 均为正定矩阵
- 若 A 为正定矩阵且可逆，则 A^{-1}, A^* 均为正定矩阵
- 若 A 为 $m \times n$ 实矩阵，则 $r(A) = n$ 的充要条件是 $A^T A$ 为正定矩阵
- 若 A 为实对称矩阵，则 A 正定的充要条件是 A 的特征值均大于零

例 6.4.1 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 求证: $r(A) = n$ 的充要条件是 $A^T A$ 为正定矩阵

证 $A^T A$ 正定 \Leftrightarrow 当 $x \neq \mathbf{0}$ 时, $x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = (Ax, Ax) > 0 \Leftrightarrow$ 当 $x \neq \mathbf{0}$ 时, $Ax \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow Ax = \mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n$

例 6.4.2 设 A 为实对称矩阵, 求证: 当 t 充分大时, $tE + A$ 为正定矩阵

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $tE + A$ 的特征值为 $t + \lambda_1, t + \lambda_2, \dots, t + \lambda_n$, 当 t 充分大时, 实对称矩阵 $tE + A$ 的特征值全大于零, 因此 $tE + A$ 为正定矩阵

例 6.4.3 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 求证: 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 为负定二次型}$$

证 由 A 为正定矩阵, 可知 $(A^*)^T$ 为正定矩阵, 令 $\tilde{A} = (A_{ij})_{n \times n}$, 其中 A_{ij} 为 A 中 a_{ij} 的代数余子式, 则 $g = x^T \tilde{A} x$ 为正定二次型, 又 $f = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j A_{ij} = -x^T \tilde{A} x$, 因此 f 为负定二次型

6.5 向量内积

定义 n 维列向量 α 与 β 的**内积** $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, 向量内积具有**对称性、线性性和正定性**, 定义**模** $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$, **距离** $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta, \alpha - \beta)}$, **单位化** $\alpha_0 = \frac{\alpha}{|\alpha|}$, **夹角** $\theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \in [0, \pi]$

向量的模具有以下性质

- 正定性: 若 $\alpha \neq \mathbf{0}$, 则 $|\alpha| > 0$
- 线性数乘: $|k\alpha| = |k||\alpha|$
- 三角不等式: $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- Cauchy-Schwarz 不等式: $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$ (当且仅当 α 与 β 线性相关时取等)

例 6.5.1 设 A 为 n 阶实矩阵, α, β 为 n 维列向量, 求证: $(A\alpha, \beta) = (\alpha, A^T \beta)$

证 注意到 $\alpha^T A^T \beta = (A\alpha)^T \beta = \alpha^T (A^T \beta)$, 因此 $(A\alpha, \beta) = (\alpha, A^T \beta)$

例 6.5.2 设 A 为 n 阶实反对称矩阵, α 为 n 维列向量, 且 $A\alpha = \beta$, 求证: α 与 β 正交

证 由 $A\alpha = \beta$, 有 $\alpha^T A\alpha = \alpha^T \beta = (\alpha, \beta)$, 又 $(\alpha^T A\alpha)^T = \alpha^T A^T \alpha = -\alpha^T A\alpha$, 可知 $(\alpha, \beta) = \alpha^T A\alpha = 0$, 因此 α 与 β 正交

6.6 共轭

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为复矩阵, 则 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{m \times n}$ 为 A 的**共轭矩阵**, 其中 \bar{a}_{ij} 为 a_{ij} 的共轭复数, 有运算规律 $\overline{kA} = \bar{k} \cdot \bar{A}$, $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

例 6.6.1 求证: 实对称矩阵的特征值都是实数

证 设 A 为实对称矩阵, α 为 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda\alpha$, 由 $A = A^T = \bar{A}$, 一方面 $\bar{\alpha}^T A\alpha = \bar{\alpha}^T(\lambda\alpha) = \lambda\bar{\alpha}^T\alpha$, 另一方面 $\bar{\alpha}^T A\alpha = \bar{\alpha}^T \bar{A}^T \alpha = (\bar{A}\alpha)^T \alpha = (\overline{\lambda\alpha})^T \alpha = \overline{\lambda}\bar{\alpha}^T \alpha$, 又 $\alpha \neq \mathbf{0}$, 有 $\bar{\alpha}^T \alpha > 0$, 则 $\lambda = \overline{\lambda}$, 故 λ 为实数

6.7 正交

设非零向量 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 即夹角为 $\frac{\pi}{2}$, 则称 α 与 β **正交**, 设非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$ 两两正交, 则称其为**正交向量组**, 特别地, 若 α_i 均为单位向量, 则称其为**标准正交向量组**, 若 \mathbb{R}^n 的一个基的向量组标准正交, 则称其为**标准正交基**, 若矩阵 A 的列向量组为标准正交向量组, 则称其为**正交矩阵**

正交向量组必定线性无关, 利用 Schmidt 正交化方法可由线性无关的向量组构造标准正交向量组

• 1. 正交化

$$\begin{aligned} - \beta_1 &= \alpha_1 \\ - \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ - \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 \\ - \dots & \\ - \beta_s &= \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \dots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1} \end{aligned}$$

• 2. 单位化

$$- \eta_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

则 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 为标准正交向量组且与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价

关于正交矩阵有如下结论

- 若 A 为正交矩阵, 则其列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 满足 $(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$
- A 为正交矩阵的充要条件是 $A^T A = E$ (证明常用)
- A 为正交矩阵的充要条件是 $A^{-1} = A^T$ (证明常用)
- 若 A 为正交矩阵, 则 $|A| = \pm 1$
- 若 A 为正交矩阵, 则 A^{-1}, A^* 均为正交矩阵
- 若 A 为正交矩阵, 则其实特征值为 ± 1
- 若 n 阶方阵 A, B 为正交矩阵, 则 AB 也为正交矩阵

例 6.7.1 求证: 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交

证 设 A 为实对称矩阵, α_1, α_2 分别为 A 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 有 $\alpha_1^T A\alpha_2 = \alpha_1^T (A\alpha_2) = \lambda_2 \alpha_1^T \alpha_2$, $\alpha_1^T A\alpha_2 = (A\alpha_1)^T \alpha_2 = \lambda_1 \alpha_1^T \alpha_2$, 则 $(\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_1^T \alpha_2 = 0$, 又 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $\alpha_1^T \alpha_2 = (\alpha_1, \alpha_2) = 0$, 因此特征向量 α_1, α_2 正交

例 6.7.2 设 A 为正交矩阵, 求证: A 的实特征值只可能为 ± 1

证 设 α 为 A 的特征值 λ 对应的特征向量, 有 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $\alpha^T A^T = \lambda\alpha^T$, 两式相乘有 $\alpha^T A^T A\alpha = \alpha^T \alpha = \lambda^2 \alpha^T \alpha$, 又 $\alpha^T \alpha > 0$, 则 $\lambda^2 = 1$, 故 A 的实特征值只可能为 ± 1

6.8 正交相似

设 A, B 为 n 阶方阵, 若存在正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = B$, 即 A, B 既相似又合同, 则称矩阵 A, B 正交相似

正交相似的研究对象一般为实对称矩阵, n 阶实对称矩阵有以下性质

- 特征值均为实数
- 正定的充要条件是特征值均大于零
- 属于不同特征值的特征向量相互正交
- 正交相似于实对角矩阵 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

重要性质 二次型 $f = x^T A x$ 中, A 为对称矩阵, 则存在正交矩阵 Q , 经正交替换 $x = Qy$ 将 f 化为标准形, 用正交替换将二次型化为标准形时, 各项系数唯一确定, 相应二次曲线的度量性质不发生改变

例 6.8.1 设 A 为正定矩阵, 求证: 存在正定矩阵 B , 使 $A = B^2$

证 由 A 为正定矩阵, 其特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均大于零, 且存在正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 令 $\Lambda' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, 则存在正定矩阵 $B = P\Lambda'P^{-1}$, 使 $A = (P\Lambda'P^{-1})(P\Lambda'P^{-1}) = B^2$

例 6.8.2 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = A$, 求证: $B = E + A + A^2 + \dots + A^m (m \in \mathbb{N})$ 是正定矩阵

证 由 $A^2 = A$ 可知 $A^m = A^{m-1} = \dots = A$, 则 $B = E + mA$ 也为实对称矩阵, 又 A 的特征值只可能为 0 或 1, 则 B 的特征值只可能为 1 或 $m+1$, 即 B 的特征值均大于零, 故 B 为正定矩阵

例 6.8.3 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵, 且 A 为正定矩阵, 求证: 存在可逆矩阵 U , 使 $U^T A U$ 和 $U^T B U$ 都是对角阵

证 由 A 为正定矩阵, 可知存在可逆矩阵 P , 使 $P^T A P = E$, 又 $P^T B P$ 为对称矩阵, 可知存在正交矩阵 Q , 使 $Q^T (P^T B P) Q$ 为对角阵, 令 $U = PQ$, 则 $U^T A U = Q^T (P^T A P) Q = Q^T E Q = E$ 为对角阵, 且 $U^T B U = Q^T (P^T B P) Q$ 为对角阵

例 6.8.4 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵, 且方程 $|xA - B| = 0$ 的根为 1, 求证: $A = B$

证 由上例结论, 存在可逆矩阵 P , 使 $P^T A P = E$, 且 $P^T B P = U$ 为对角阵, 又 $|xA - B| = 0$ 的根为 1, 即 $|xE - U| = 0$ 的根为 1, 则 $|xE - U| = (x-1)^n$, 可知 $U = E$, 因此 $A = B = (PP^T)^{-1}$

7 线性空间

7.1 线性空间

设 V 为非空集合, K 为数域, 在 V 中定义加法 (满足交换律、结合律、零元存在、负元存在), 在 K 和 V 间定义数乘 (满足 $1\alpha = \alpha, k(l\alpha) = l(k\alpha) = (kl)\alpha, (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$), 若 V 对加法和数乘封闭, 则称 V 构成 K 上的线性空间

K 上的线性空间 V 具有如下性质

- 零元唯一, 记作 0

- V 中元素 α 负元唯一, 记作 $-\alpha$
- $\forall \alpha \in V: 0\alpha = \mathbf{0}, (-1)\alpha = -\alpha$
- $\forall k \in K: k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- 若 $k\alpha = \mathbf{0}$, 则 $k = 0$ 或 $\alpha = \mathbf{0}$

设 V 是 K 上的线性空间, W 是 V 的非空子集, 若对于 V 中定义加法和数乘, W 也构成 K 上的线性空间, 则称 W 为 V 的**线性子空间**, 简称子空间

验证 W 是 V 的子空间, 只要验证 W 对 V 中的加法和数乘封闭, 验证 W 是线性空间, 可以将 W 视为某个线性空间 V 的子空间, 验证三条性质

1. $W \subseteq V$
2. W 对于 V 中的加法封闭
3. W 对于 V 中的数乘封闭

则验证了 W 为 K 上的线性空间

例 7.1.1 设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 求证: $W_1 \cup W_2$ 为 V 的子空间的充要条件是 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$

证 “ \Rightarrow ”: (反证) 假设存在 α_1, α_2 满足 $\alpha_1 \in W_1, \alpha_1 \notin W_2, \alpha_2 \notin W_1, \alpha_2 \in W_2$, 则 $\alpha_1, \alpha_2 \in W_1 \cup W_2$, 由 $W_1 \cup W_2$ 为 V 的子空间, 可知 $\alpha_1 + \alpha_2 \in W_1 \cup W_2$, 若 $\alpha_1 + \alpha_2 \in W_1$, 则 $(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 = \alpha_2 \in W_1$, 不能成立, 若 $\alpha_1 + \alpha_2 \in W_2$, 则 $(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2 = \alpha_1 \in W_2$, 不能成立, 可知 $\alpha_1 + \alpha_2 \notin W_1 \cup W_2$, 矛盾, 因此假设不成立, 有 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$

“ \Leftarrow ”: 由对称性不妨设 $W_1 \subseteq W_2$, 则 $W_1 \cup W_2 = W_2$ 显然为 V 的子空间

例 7.1.2 设 W_1, W_2 为 V 的真子空间, 求证: $\exists \alpha \in V: \alpha \notin W_1, \alpha \notin W_2$

证 (反证) 假设 $\forall \alpha \in V: \alpha \in W_1 \cup W_2$, 则 $W_1 \cup W_2 = V$ 为 V 的子空间, 有 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$, 不妨设 $W_1 \subseteq W_2$, 则 $W_1 \cup W_2 = W_2 = V$, 与 W_2 为 V 的真子空间矛盾, 因此 $\exists \alpha \in V: \alpha \notin W_1, \alpha \notin W_2$

例 7.1.3 设 W, W_1, W_2 为 V 的子空间, $W_1 \subseteq W_2, W \cap W_1 = W \cap W_2, W + W_1 = W + W_2$, 求证: $W_1 = W_2$

证 任取 $\gamma \in W_2 \subseteq W + W_2 = W + W_1$, 存在 $\alpha \in W, \beta \in W_1$, 使 $\gamma = \alpha + \beta$, 又 $\beta \in W_1 \subseteq W_2$, 则 $\alpha = \gamma - \beta \in W_2$, 有 $\alpha \in W \cap W_2 = W \cap W_1 \subseteq W_1$, 由 $\alpha, \beta \in W_1$, 则 $\gamma = \alpha + \beta \in W_1$, 因此 $W_2 \subseteq W_1$, 又 $W_1 \subseteq W_2$, 故有 $W_1 = W_2$

7.2 基与坐标

设 V 是 K 上的线性空间, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 若 V 中任一向量均可由该向量组线性表示, 则称其为 V 的一组**基**, 向量个数 n 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V = n$, 若向量组包含无限个向量, 则称 V 为**无限维线性空间**

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 K 上线性空间 V 的一组基, 对任意 $\gamma \in V$ 有 $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$, 定义 V 到 K^n 上的映射 $\sigma(\gamma) = x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 则称 $\sigma(\gamma)$ 为 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的**坐标**
取定一组基后, 向量 γ 与其坐标 $\sigma(\gamma)$ 建立一一对应的关系, 且坐标保留向量运算的线性性

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 为 K 上线性空间 V 的两组基, 且存在方阵 C 使 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)C$, 则该式为**基变换公式**, C 为**过渡矩阵**, C 一定可逆, 且 C 的第 i 列代表 α_i 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标, 若向量 γ 在两组基下的坐标分别为 u 和 v , 则有 $u = Cv$, 该式即为**坐标变换公式**, 过渡矩阵揭示了同一向量在不同基底下的坐标关系

7.3 同构

设 V 和 V' 为 K 上的两个线性空间, 若 V 到 V' 的双射 σ 满足 $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$, $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$, 则称 σ 为 V 到 V' 的一个**同构**

K 上任意 n 维线性空间 V 均与 K^n 同构, 因此 K 上任意抽象 n 维线性空间 V 均可归结为具体的线性空间 K^n 进行研究

设 V 和 V' 为 K 上的两个线性空间, 若 σ 为 V 到 V' 的一个同构, 则有以下性质

- $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$, $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$
- $\sigma\left(\sum_{i=1}^r k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^r k_i \sigma(\alpha_i)$
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关 (无关) 当且仅当 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_r)$ 线性相关 (无关)
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 V 的一组基当且仅当 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_r)$ 是 V' 的一组基
- 若 W 是 V 的子空间, 则 $\sigma(W)$ 是 V' 的子空间, 且 $\dim W = \dim \sigma(W)$

例 7.3.1 在线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中, 取 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 的维数

解 在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中取一组基 $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\epsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 在这组基下的坐标为 $\sigma(\alpha_1) = (1, 2, 3, 4)^T$, $\sigma(\alpha_2) = (3, 1, 9, 12)^T$, $\sigma(\alpha_3) = (2, 5, 6, 8)^T$, $\sigma(\alpha_4) = (1, 6, 2, 3)^T$, $\sigma(\alpha_5) = (2, 5, 5, 7)^T$, 构造下列矩阵并做初等行变换化为阶梯矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & 12 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知 $L(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3), \sigma(\alpha_4), \sigma(\alpha_5))$ 的维数为 3, 因此 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 的维数也为 3

7.4 线性变换

设 V 是 K 上的线性空间, 若 \mathcal{A} 是 V 到自身的一个映射, 则称 \mathcal{A} 为 V 的一个**变换**, 记作 $\beta = \mathcal{A}(\alpha)$, β 称为 α 在变换 \mathcal{A} 下的**像**, 若 \mathcal{A} 满足 $\mathcal{A}(\alpha + \beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)$, $\mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}(\alpha)$, 则称 \mathcal{A} 为线性空间 V 的一个**线性变换**

设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为 V 的两个线性变换, 定义 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 的**和** $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\alpha) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)$, \mathcal{A} 的**纯量积** $(k\mathcal{A})(\alpha) = k(\mathcal{A}(\alpha))$, \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 的**积** $(\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha))$, 它们仍为 V 的线性变换

给定 V 的一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, 存在矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 使 $\mathcal{A}(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)A$, 则称 A 为 \mathcal{A} 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 下的**矩阵**, V 中的线性变换 \mathcal{A} 与矩阵 A 具有一一对应的关系, 若 ξ 的坐标为 x , 则其像 $\mathcal{A}(\xi)$ 的坐标为 Ax

线性变换在不同基下对应不同矩阵, 设 V 的线性变换 \mathcal{A} 在两组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下矩阵分别为 A 和 B , 若从 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 C , 则有 $B = C^{-1}AC$, 该公式揭示了线性变换在不同基下的联系, 因此为求某一线性变换在一组基下的矩阵, 只要从已知矩阵的基出发, 计算两组基间的过渡矩阵即可

设 \mathcal{A} 为 V 的线性变换, 定义 \mathcal{A} 的**值域** $\mathcal{A}(V) = \{\mathcal{A}(\xi) | \xi \in V\}$, \mathcal{A} 的**核** $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\xi \in V | \mathcal{A}(\xi) = \mathbf{0}\}$, 也可分别记为 $\text{Im}(\mathcal{A})$ 和 $\text{Ker}(\mathcal{A})$, 它们均为 V 的子空间, 定义 \mathcal{A} 的秩 $r(\mathcal{A}) = \dim(\text{Im}(\mathcal{A}))$, \mathcal{A} 的零度 $r(\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{0})) = \dim(\text{Ker}(\mathcal{A}))$

线性变换与矩阵具有相同的本质, 若 \mathcal{A} 在 V 的一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵为 A , 则 $r(\mathcal{A}) = r(A)$, $r(\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{0})) = n - r(A)$, 因此线性变换的秩对应齐次线性方程组系数矩阵的秩, 线性变换的零度对应齐次线性方程组的解空间维数, 线性变换是比矩阵与方程组更抽象、更广泛的刻画方式

维数定理 设 V 为 K 上的线性空间, 若 σ 为 V 的线性变换, 则有 $\dim V = \dim(\text{Im}(\sigma)) + \dim(\text{Ker}(\sigma)) = r(\sigma) + r(\sigma^{-1}(\mathbf{0}))$, 从矩阵与方程组的角度, 也可表述为: 齐次线性方程组系数矩阵的秩与解空间维数之和等于未知数个数

线性变换具有如下性质

- $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}(-\alpha) = -\mathcal{A}(\alpha)$
- $\mathcal{A}((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)x) = (\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \dots, \mathcal{A}(\alpha_m))x$
- $\mathcal{A}((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)A) = (\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m))A$

例 7.4.1 设 V 中线性变换 \mathcal{J} , 在基 α_1, α_2 下的矩阵 $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 求 \mathcal{J} 在基 α_2, α_1 下的矩阵

解 令 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 有 $(\alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2)C$, 又 $\mathcal{J}(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)J$, 可知 \mathcal{J} 在基 α_2, α_1 下

的矩阵 $J' = C^{-1}JC = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

例 7.4.2 设 σ 为 V 的一个线性变换, $\eta \in V$, 且 $\eta, \sigma(\eta), \dots, \sigma^{n-1}(\eta) \neq \mathbf{0}$, 而 $\sigma^n(\eta) = \mathbf{0}$, 求证: $\eta, \sigma(\eta), \dots, \sigma^{n-1}(\eta)$ 线性无关

证 设 σ 的矩阵为 A , 有 $x, Ax, \dots, A^{n-1}x \neq \mathbf{0}$, 且 $A^n x = 0$, 可知 $x, Ax, \dots, A^{n-1}x$ 线性无关, 即 $\eta, \sigma(\eta), \dots, \sigma^{n-1}(\eta)$ 线性无关

例 7.4.3 设 \mathbb{R}^3 中线性变换 $\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, 求 σ 的值域 $\text{Im}(\sigma)$ 和核 $\text{Ker}(\sigma)$, 并确定它们的维数

解 σ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Ax = \begin{pmatrix} a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$, 则 $\text{Im}(\sigma) = \left\{ k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$,

解齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$, 则 $\text{Ker}(\sigma) = \left\{ k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_3 \in \mathbb{R} \right\}$, 因此 σ 值域的维数 $\dim(\text{Im}(\sigma)) = 2$,

核的维数 $\dim(\text{Ker}(\sigma)) = 1$

7.5 欧氏空间

设 V 为 \mathbb{R} 上的一个线性空间, 若对 V 中任意一对元素 α, β 定义**内积** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, 满足**对称性**、**线性性**、**正定性**, 则称 V 关于该内积构成**欧氏空间**, 对 V 中任意向量 α, β , 定义 α 的**长**

度 $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} \in [0, +\infty)$, α 与 β 的**夹角** $\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \in [-1, 1]$, α 与 β 的**距离** $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| \in [0, +\infty)$

设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 为 V 的一组基, 定义 $A = \begin{pmatrix} (\epsilon_1, \epsilon_1) & (\epsilon_1, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_1, \epsilon_n) \\ (\epsilon_2, \epsilon_1) & (\epsilon_2, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_2, \epsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\epsilon_n, \epsilon_1) & (\epsilon_n, \epsilon_2) & \cdots & (\epsilon_n, \epsilon_n) \end{pmatrix}$ 为这组基的**度量**

矩阵, 若 $\alpha, \beta \in V$, 且在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 下的坐标为 $x = \sigma(\alpha), y = \sigma(\beta)$, 则 $(\alpha, \beta) = x^T A y$, 因此在任意一组基下内积都可以借助相应的度量矩阵来计算

设 V 为 n 维欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$, 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β **正交**, 记为 $\alpha \perp \beta$, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 V 中 s 个非零向量, 若当 $i \neq j$ 时, $\alpha_i \perp \alpha_j$, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为一个**正交向量组**, 设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 为 V 的一个正交向量组, 则它们必定线性无关, 构成 V 的一组**正交基**, 若正交基中每个向量都是**单位向量**, 则称该正交基为一组**标准正交基**, 利用 Schmidt 正交化方法, 可以从任何一组基出发, 构造出一组标准正交基, 正交基的度量矩阵为对角矩阵, 标准正交基的度量矩阵为单位矩阵, 因此利用标准正交基计算内积可以简化运算

设 V 和 V' 为两个有限维欧氏空间, 若 V 到 V' 的双射 σ 满足 $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$, $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$, $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$, 则称 σ 为欧氏空间 V 到 V' 的一个**同构**, 欧氏空间的同构是一个等价关系, 任一 n 维欧氏空间都同构于 \mathbb{R}^n , 因此两个有限维欧氏空间同构的充要条件是它们的维数相同, 利用欧氏空间的同构, 可以将抽象的欧氏空间转换为具体的 \mathbb{R}^n 研究

欧氏空间有如下性质

- $|\alpha| \geq 0$, 且 $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$
- $|k\alpha| = |k||\alpha|$
- $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$ (当且仅当 α 与 β 线性相关时取等)

例 7.5.1 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为欧氏空间 V 的两个线性变换, 且对任意 $\alpha \in V$, 均有 $(\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\alpha)) = (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\alpha))$, 求证: \mathcal{A}, \mathcal{B} 的值域 $\mathcal{A}(V), \mathcal{B}(V)$ 同构

证 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的矩阵分别为 A, B , 构造 $\varphi(A\alpha) = B\alpha$, 一方面, 若 $A\alpha = A\beta$, 有 $A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}$, 则 $(B(\alpha - \beta), B(\alpha - \beta)) = (A(\alpha - \beta), A(\alpha - \beta)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, 有 $B(\alpha - \beta) = \mathbf{0}$, 则 $S\alpha = S\beta$, 故 φ 为映射 (且为满射), 另一方面, 若 $A\alpha \neq A\beta$, 则 $B\alpha \neq B\beta$, 故 φ 为单射, 因此 φ 为从 $\mathcal{A}(V)$ 到 $\mathcal{B}(V)$ 的双射, 一方面, $\varphi(A\alpha + A\beta) = \varphi(A(\alpha + \beta)) = B(\alpha + \beta) = B\alpha + B\beta$, $\varphi(k(A\alpha)) = \varphi(A(k\alpha)) = B(k\alpha) = k(B\alpha)$, 另一方面, 由 $(A(\alpha + \beta), A(\alpha + \beta)) = (A\alpha, A\alpha) + 2(A\alpha, A\beta) + (A\beta, A\beta)$, $(B(\alpha + \beta), B(\alpha + \beta)) = (B\alpha, B\alpha) + 2(B\alpha, B\beta) + (B\beta, B\beta)$, 可知 $(A\alpha, A\beta) = (B\alpha, B\beta)$, 因此 φ 为从 $\mathcal{A}(V)$ 到 $\mathcal{B}(V)$ 的同构映射, 即 $\mathcal{A}(V), \mathcal{B}(V)$ 同构