18817463205 赵

杨娟 数学科学学院(6号楼) 430室　ymsjtu@sjtu.edu.cn

周三 2:00－4:00　　每周二交作业

10.17日(大概) 期中，每2章1次，请假提前1周

MIT introduction to linear Algebra

matlab

定义

1、数集 F：N、R、Q、C、Z

2、数域 ⟶ 四则运算封闭 $+\ 0,1\in F$

3、同解：无解亦是

矩阵的初等变换(定义)

① $r_i \leftrightarrow r_j$　② $kr_i\ (k\neq 0)$　③ $r_j + kr_i$ ↗改变了r_j

⇒ 阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵

① $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 对角矩阵

② $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ 单位矩阵 ⟶ 乘任何矩阵都还是这个矩阵

第2节

何时有解？ s:系数矩阵非零行　r:增广矩阵非零行　$A_{(m\times n)}$

① $s=r$，有解 — $s=r=n$ 有唯一解；$s=r<n$ 有∞解　② $s<r$，无解

齐次时：永远都有 $r=s$，若解唯一，则为"$a_i=0$"

矩阵的运算

① 数乘 ② A与B的和(差)，记为 $A+(-)B$.

③ 矩阵的乘法 $C=AB$. $A_{m\times n}B_{n\times p}$ 的第(r,s)位为 $\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\cdot b_{is}$

⟶ 读作"A左乘B"

矩阵的性质：

① $(AB)C = A(BC) = D$　$A_{m\times n}\ B_{n\times p}\ C_{p\times s}$

证：D的(t,l)

$$LHS = d_{(t,l)} = \sum_{k=1}^{p}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_{ti}\cdot b_{ik})\times c_{k,l}\right]$$

$$\parallel$$

$$RHS = d'_{(t,l)} = \sum_{i=1}^{n}\left[a_{ti}\cdot\sum_{k=1}^{p}(b_{ik}\cdot c_{kl})\right]$$

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_{ti}\cdot b_{ik}\cdot c_{k,l})\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p}(a_{ti}\cdot b_{ik}\cdot c_{k,l})\right]$$

② $(A+B)C = AC+BC$，$A(B+C) = AB+AC$　(易证)

方阵的幂

A^m；　$A^0 = E$ 此时：$A\neq 0$

$A^k\cdot A^l = A^{k+l}$

Def. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i$，$f(A) = a_n\cdot A^n + \cdots + a_1\cdot A + a_0 E$.

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^n$

Proof：$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 1)$，令 $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$Q = (1\ 1)$　且 $PQ = 2$

$A^n = (PQ)^n = (PQ)(PQ)\cdots(PQ) = P(QP)(QP)\cdots(QP)Q = 2^{n-1}PQ = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

将A拆为2个更简单的矩阵，再利用结合律.

用这种方法时，A的行列式为0

如 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 3)$，$(1\ 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$

$A^n = 5^{n-1}\cdot A$.

$|A-kE| = \begin{vmatrix} 2-x & 6 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x=0$ 或 5 ↗本征值$=k$　$A^n = k^{n-1}\cdot A$

例：$A = \begin{pmatrix} a & & \\ 1 & a & \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，求$A^n$

Proof：$A = \begin{pmatrix} a & & \\ 1 & a & \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = aE_3 + B$，其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A$、$B$可交换：$AB=BA$

⇓ 二项式展开

$A^n = (aE_3+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (aE)^{n-i}\cdot B^i$　特别地 $B^3=0$.

$= a^n\cdot E^n + na^{n-1}\cdot E^{n-1}\cdot B + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\cdot E^{n-2}\cdot B^2$.

$= \begin{pmatrix} a^n & & \\ na^{n-1} & a^n & \\ \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$　注意二项式展开的应用.

Def. 矩阵的转换

$A = (a_{ij})_{m\times n}$，$A^T\ (A') = (a_{ji})_{m\times n}$.

性质：① $(B+C)^T = B^T + C^T$　② $(kA)^T = kA^T$　③ $(AB)^T = B^T A^T$ ↘用"Σ"证

④ $(A_1A_2\cdots A_m)^T = A_m^T\cdots A_1^T$　⑤ $(A^m)^T = (A^T)^m$

对称矩阵：$A^T = A$，反对称矩阵：$A^T = -A$.

Def. 方阵的迹(trace)

$A = (a_{ij})_{n\times n}$，迹：$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

性质：$tr(AB) = tr(BA)$

$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right)$　求和号可换

$\boxed{\text{行列式}}$ —— 应用于方阵

二阶方阵行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

解方程：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{21}$ $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

$x_1 = \frac{D_1}{D}$ $x_2 = \frac{D_2}{D}$

n阶行列式

n阶方阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

划去 a_{ij} 所在的行与列，剩下的元素 → n-1 阶方阵

其行列式称之为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

n阶方阵A的行列式 记为 $|a_{ij}|_n$，$|A|$ or $\det A$

$|A| = \begin{cases} n=1\text{时}, & a_{11} \\ n\geq 2\text{时}, & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} \end{cases}$ —— 定义1

定义2：$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}$

行列式的性质 ☆ ☆

1、$|A| = |A^T|$ （用数学归纳法证明）

2、交换一个方阵的某两行，则它的行列式的值改变符号 (可作为练手) ✓ 好想不好写

⇓

若一个方阵有两行对应元素相同，则其行列式的值为0

3、某一行所有元素 $\times k$，则行列式 $\times k$

4、行列式中某行元素都是两个元素的和，则此行列式可分解为两个行列式

5、方阵A的某行k倍加到另一行，得到方阵B，$A \xrightarrow{r_j + k r_i} B$ 有 $|A| = |B|$

6、$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$

6'、$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$ 第i行所有元素与第j行对应元素的代数余子式乘积之和为0.

7、A,B为同阶方阵，则 $|AB| = |A||B|$ (很难证)

关注计算而非证明

$\boxed{\text{Vandermonde 行列式}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}^{n} (x_i - x_j)$$

逆矩阵

$AX = \beta$，那么有没有 $X = A^{-1}\beta$

设n阶方阵A，若∃n阶方阵B，s.t. $AB = BA = E$

则称矩阵A可逆，B是A的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$

若不存在，称A不可逆

逆矩阵唯一

伴随矩阵

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{pmatrix}$

性质：$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & |A| & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E$

So we got $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ （当 $|A| \neq 0$ 时）

推论：若 $AB = E$ or $BA = E$，则 $B = A^{-1}$

$|A||B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$ 且 $B = EB = A^{-1}AB = A^{-1}E = A^{-1}$

克拉默法则

关于 $AX = b$ 的 $n\times n$ 线性方程组

若 $D = |A| \neq 0$，则其有唯一的解。D_j 为把第j列换为b.

$x_j = \frac{D_j}{D}$ 注：逆命题也成立

推论：齐次线性 $A_{n\times n}X = 0$ $\begin{cases} |A| \neq 0, \text{只有零解} \\ |A| = 0, \text{有非零解} \end{cases}$

可逆矩阵的性质

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$ (2) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

例：A，B，A+B均可逆，求证 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆 并求其可逆矩阵

$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}E + EB^{-1} = A^{-1}BB^{-1} + A^{-1}AB^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$

分块矩阵

用若干条横线与竖线将 $A_{m\times n}$ 分成若干个小矩阵

例如：$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

乘法：$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} = C = (C_{ij})_{r\times t}$ 其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}$

转置：$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix}$

分块（反）对角阵

$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$ ；$A = \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_n & & \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_n^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & A_2^{-1} & \end{pmatrix}$ ；

$\left| \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \right| = |A_1||A_2|$

初等矩阵

列：c_i 行：r_j

A经有限次初等变换 → B，称A与B相抵，记为 $A \cong B$

Defination：单位矩阵E经一次变换后得到的矩阵，称之为初等矩阵

(1) $E(i,j)$ —— 第i行和第j行互行

(2) $E(i(k))$ —— 第i行乘k倍

(3) $E(j,i(k))$ —— $r_j + kr_i$

一些性质与推论（证明时把A按行分块）

1. $E(i,j)A \Rightarrow$ A的i行，j行对调 因此：$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$

   $AE(i,j) \Rightarrow$ A的i列，j列对调

2、$E(i(k))A \Rightarrow$ A的i行 $\times k$ 因此：$E(i(k))^{-1} = E(i(k))$

   $AE(i,j) \Rightarrow$ A的i列 $\times k$

3、$E(j,i(k))$ 同理 因此：$E(j,i(k))^{-1} = E(j,i(k))$

定理2.5

对任意的$m\times n$矩阵A，存在一系列m阶初等矩阵$P_1\cdots P_n$与n阶初等矩阵$Q_1\cdots Q_t$，s.t.

$$P_1P_2\cdots P_nAQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$$ —— 标准形

证：① A能经过初等行变换 ⇒ 简化阶梯矩阵（设非零行行数为r）

② 经过列变换 ⇒ $\begin{pmatrix}E_r&T\\O&O\end{pmatrix}$ 其中T为$r\times(n-r)$阶矩阵

③ 经过C_i+kC_j变换 ⇒ $\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$

矩阵的秩

Defination：设A为$m\times n$的矩阵，在A中任取k行k列（$k\le\min\{m,n\}$）位于这些行列交叉处的元素按相对位置构成k阶行列式，称为A的k级(阶)子式

Defination：在A中若存在1个r阶子阵不等于0，而r+1阶全为0，称r为矩阵的秩，记为$r(A)$

特别的，$r(O)=0$

一些性质：

(1) A的秩是唯一的

(2) A_1是A的一个部分矩阵，$r(A_1)\le r(A)$

(3) $r(A)=r(A^T)$

(4) 阶梯形矩阵的秩=它非零行的个数

(5) 可逆矩阵的秩=它的阶数

若$r(A_{m\times n})=m$ （or $r(A_{m\times n})=n$）则称A为行(列)满

若$r(A_n)=n$，则称A为满秩矩阵

从而A为满秩矩

定理2.6 初等变换不改变矩阵的秩

定理2.7 $\forall A_{m,n}$，$\exists$ m阶$P_1\cdots P_s$，n阶$Q_1\cdots Q_t$

s.t. $P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$，有$r=r(A)$且标准形唯一

推论：

1、$\forall A_{m\times n}$，$\exists$ m阶P、n阶Q，s.t. $PAQ=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$

2、A可逆 ⇔ A标准型为E_n

3、A可逆 ⇔ $A=P_1P_2P_3\cdots P_n$，P_i为初等矩阵

4、A可逆 ⇒ A只经过行(列)变换化为E_n

6、$A_{m\times n}\cong B_{m\times n}$ ⇔ ∃可逆矩阵P,Q，s.t. $PAQ=B$

例：$A_{m\times n}$，$r(A)=1$ ⇔ ∃$m\times1$的非零矩阵α与$n\times1$的非零矩阵β，s.t. $A=\alpha\beta^T$

"⇒" ∵$r(A)=1$．$PA_{m\times n}Q=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times n}$

定理2.8

设A是$m\times n$矩阵，线性方程组$Ax=b$经初等行变换后得到$A_1x=b_1$与原方程组同解

需证 $Ax_0=b$ ⇔ $A_1x_0=b_1$ 即可

定理2.9

$m\times n$线性方程组$Ax=b$，其增广矩阵为$\hat{A}=(A\ \ b)$，则：

线性方程组有解 ⇔ $r(A)=r(\hat{A})$

特别地：(1) $r(A)=r(\hat{A})=n$ 唯一解

(2) $r(A)=r(\hat{A})<n$ 无穷多解

(2) $r(A)<r(\hat{A})$ 无解

推论7：$m\times n$线性齐次方程组$Ax=0$

(1) $r(A)=n$ 无非零解，($|A|\ne0$)

(2) $r(A)<n$，有非零解

(3) $m<n$则，有非零解

求逆矩阵的初等变换法

欲求A的逆矩阵

构造分块矩阵$(A\mid E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\mid A^{-1})$，注：当然也有$\begin{pmatrix}A\\\hline E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\\hline A^{-1}\end{pmatrix}$，习惯上用前者

Proof：$A=P_1P_2\cdots P_k$ where P_i是初等矩阵

⇒ $P_k^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}A=E$

$A^{-1}=P_k^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}=P_k^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}E$

significant：☆

$(A\mid B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\mid A^{-1}B)$

分块矩阵的初等变换

定义2.22 初等变换

分块矩阵$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&&\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix}$

(1) 交换分块矩阵的第i行和第j行

(2) 用某个适当阶数可逆矩阵P左(右)乘A的第i行(列) ☆

(3) 第j行(列)加(2)中那个 ☆这里P不一定可逆

定义2.23 分块初等矩阵

n阶单位阵作一次初等变换得到的矩阵

Theorem

分块初等矩阵乘分块矩阵相当于初等变换

分块初等矩阵

$$\begin{pmatrix}E_{n_1}&&&&\\&\ddots&&&\\&&O&\cdots&E_{n_i}\\&&\vdots&&\vdots\\&&E_{n_j}&\cdots&O\\&&&&&\ddots\\&&&&&&E_{n_n}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}E_{n_1}&&&&\\&\ddots&&&\\&&E_{n_{i-1}}&&&\\&&&P&&\\&&&&E_{n_i}&\\&&&&&\ddots\\&&&&&&E_{n_n}\end{pmatrix},\ P可逆\quad \begin{pmatrix}E_{n_1}&&&&\\&\ddots&&&\\&&E_{n_i}&&\\&&\vdots&\ddots&\\&&P&\cdots&E_{n_j}\\&&&&&\ddots\\&&&&&&E_{n_n}\end{pmatrix},\ P随意$$

第三章 n维向量与线性方程组解的结构

n维向量

n个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$a_i \in F$ 称为n维向量

n维行向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，n维列向量 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

一些性质

零元存在，对数1 $\longrightarrow$ 单位元

负向量存在 $\longrightarrow$ 加法逆元

$\vec{A}\vec{x}=\vec{\beta}$

$\vec{A} = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_n)$，$\vec{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$，$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

从而有：$x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n = \vec{\beta}$ 称为 向量表示 或 向量方程

向量的线性组合

对于 n维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$，如果存在数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，s.t.

(后来没在记)

Important properties

① $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

② if $AB = 0$，$r(A) + r(B) \le n$

③ $\max\{r(A), r(B)\} \le r(A, B) \le r(A) + r(B)$

④ $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$ —— P78 例2.44