第1章

数域 — 包含0与1且对四则运算封闭

概念：初等行变换、阶梯形矩阵、(行)简化阶梯形矩阵(规范阶梯形)

解的判别 — 比非零行个数　直接对 $\tilde{A}$ 变换即可

取 x_i 为自由未知量

第2章

1、$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，求 $A^n=?$

特征值：0、2　$(\lambda-2)\lambda=0 \Rightarrow A^2=2A$

$\Rightarrow A^n=2^{n-1}\cdot A$

2、$A=\begin{pmatrix}a&&\\1&a&\\0&1&a\end{pmatrix}$ 求 A^n $(n\geq 2)$

记 $A=aE+B$ 有 $B^2=\begin{pmatrix}0&&\\0&0&\\1&0&0\end{pmatrix}$ $B^3=0$

$tr(AB)=tr(BA)$; if $tr(AA^T)=0 \Rightarrow A=0$

余子式、代数余子式

Vandermonde 行列式 $\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)$

伴随矩阵　$AA^*=|A|E$

Cramer 法则

初等矩阵 的左乘与右乘

相抵；$r(A)=r(PAQ)$

反对角行列式：$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$　因子为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a&a\\a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a&a&\cdots&x&a\\a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$　$\begin{vmatrix}c_0&a_1&\cdots&a_n\\b_1&c_1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\b_n&0&\cdots&c_n\end{vmatrix}=(c_0-\sum\frac{a_ib_i}{c_i})\prod_{j=1}^{n}c_j$　三对角行列式 有递推公式☆ $\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1&&\\\gamma_1&\alpha_2&\beta_2&\\&\gamma_2&\alpha_3&\beta_3\\&&&\ddots\end{vmatrix}$

一、分块矩阵　$A=\begin{pmatrix}A_1&\\&A_2\end{pmatrix}$

(1) $|A|=|A_1||A_2|$　(2) $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&\\&A_2^{-1}\end{pmatrix}$　(3) $A^*=\begin{pmatrix}|A_2|A_1^*&\\&|A_1|A_2^*\end{pmatrix}$

二、$A=\begin{pmatrix}&A_1\\A_2&\end{pmatrix}$

(1) $|A|=(-1)^{n_1n_2}\cdot|A_1||A_2|$　(2) $A^{-1}=\begin{pmatrix}&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&\end{pmatrix}$　(3) $A^*=\begin{pmatrix}&|A_1|A_2^*\\|A_2|A_1^*&\end{pmatrix}$

三、$\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$

by $\begin{pmatrix}E_m&\\-CA^{-1}&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

$|E_n-BA|=|E_m-AB|$ by $\begin{pmatrix}E_m&A\\B&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&-A\\&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m&\\B&E_n-BA\end{pmatrix}$ 且 $\begin{pmatrix}E_m&-A\\&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&A\\B&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m-AB&\\B&E_n\end{pmatrix}$

1. $r(A+B)\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)$，$\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A,B)$
2. $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$，　极大线性相关组
3. $AB=0\Rightarrow r(A)+r(B)\leq n$
4. $r(A^TA)=r(A)$　$A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解
5. $r(A^*)=1$ when $r(A)=n-1$
6. $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$　$r\begin{pmatrix}A&0\\E_n&B\end{pmatrix}\geq r(A)+r(B)$
7. $r(A)=1$ iff $A=\alpha\beta^T$　$\| \; r\begin{pmatrix}AB&\\&E_n\end{pmatrix}$

第三章

线性表示 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)x=\beta$ 有解

$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)\Leftrightarrow\alpha_i$ 可线性表示 β_i　可用初等行变换求表示系数们

线性相关、线性无关

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)A_{m\times s}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$　β 线性无关 iff $r(A_{m\times s})=s$，when α 无关

极大线性无关组

α 线性无关 (s个) 可由 β 表示 (k个) $\Rightarrow k>s$

α 可由 β 表示 $r(\alpha)<r(\beta)$

线性方程组解的结构　特解+通解

公共解：$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 或 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+l_1\xi_1+l_2\xi_2=0$

第4章

Defination of 线性空间：封闭+交换+"0"+负元+"1"+(3个)

线性子空间封闭

基、维数．同构映射(不怎么考)

坐标 $\gamma=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)x$．$\gamma$ 在基 α 下的坐标 x

基变换公式　$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)C$

欧氏空间 Defination $\begin{cases}(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)\\(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)\\(\alpha,\alpha)\geq 0 \text{ 且 } (\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0\end{cases}$

$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

Cauchy-Schwarz $|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|$　取等 iff α,β 线性相关

夹角 $\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

Schmidt orthogonalization：$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$

Orthogonal matrix $AA^T=E$ whose properties：$|A|=\pm1$

linear mapping $f:V\to V$　$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta)$　$\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}(\alpha)$

$\underbrace{Im(\mathcal{A})=\{\mathcal{A}(\xi)|\xi\in V\}}_{\text{值域}}$ $\underbrace{Ker(\mathcal{A})}_{\text{核}}=\{\xi|\mathcal{A}(\xi)=0\}$　$r(Im(\xi))$ — 秩　$r(Ker(\xi))$ — 零度

$\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B=\mathcal{A}((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B)$

$\mathcal{A}$ 在基 ε 下的矩阵 A：$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$　$\mathcal{A}(\varepsilon_1)=k_{11}\varepsilon_1+\cdots+k_{n1}\varepsilon_n$

$\mathcal{A}(\varepsilon)=\varepsilon A$　$\mathcal{A}(\eta)=\eta B$　$\eta=\varepsilon C$．$C^{-1}AC=B$

第5章 Tips

1. $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为A的特征根，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为对应的特征向量，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关（左乘 $A, A^2, \cdots, A^{s-1}$）

2、$r(A)=1$，$A=\alpha\beta^T$. A的特征值为：$n-1$ 个0与 $tr(A)$ $\Rightarrow$ A可相似对角化
n个线性无关的向量

3、$(A-aE)(A-bE)=0$

$\Rightarrow (\lambda-a)(\lambda-b)=0$ 且 $r(A-aE)+r(A-bE)=0$ $\Rightarrow$ A有n个线性无关的向量 $\Rightarrow$ A可相似对角化

4、实对称矩阵，属于不同λ的α正交 $(\alpha_1^TA\alpha_2=\lambda_1\alpha_1^T\alpha_2=\lambda_2\alpha_1^T\alpha_2)$

5、A为n阶实对称矩阵，则∃正交阵Q，s.t. $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

6、(经验) A的特征根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$. 则 $(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_sE)=0$

特征子空间维数称为 λ_0 的几何重数 . 代数重数

$g(A)$ 与 $g(\lambda)$ 的关系

几何重数 ≤ 代数重数

A有n个线性无关的特征向量 ⇒ A可相似对角化

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

步骤：求λ + 解基础解系 ——若是实对称矩阵，还需正交化
是否 $r(\lambda_iE-A)=n-n_i$

实对称矩阵必可对角化

第6章 Tips $f=x^TAx$

1. $P^TAP=B$ (合同)

2、必存在正交替换 $x=Qy$ （求Q的方法同上一章）

3、配方法，有时出现 $y_i=0$ 的情况，可任取

4、惯性定理（规范标准型唯一）

5、几个等价命题：
(1) A为正定矩阵
(2) A的特征值全大于0
(3) A合同于E
(4) $A=M^TM$
(5) A的各阶顺序主子式大于0

6、$(Q^{-1}CQ)(Q^{-1}CQ)=Q^{-1}C^2Q$ 有奇效

题：P230. 231

4.(3) $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$

$(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-1)+32-4\times4(\lambda-4)-8(\lambda-1)$
$=(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda-4)+32-16\lambda+64-8\lambda+8$
$=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-4\lambda^2+8\lambda-4-24\lambda+104$
$=\lambda^3-6\lambda^2-15\lambda+100$
$=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$

简便？✓ 行列式

21、$(b_ib_ja_{ij})_{n\times n}=diag(b_1,\cdots,b_n)\,A\,diag(b_1,\cdots,b_n)$

k阶顺序主子式：$(b_1^2\cdot b_2^2\cdot\cdots\cdot b_k^2)\left|(a_{ij})_{k\times k}\right|$

23、$AA^T=E$，$A=A^T$，A为正定阵

$\Rightarrow A^2=E$ A的特征值仅为1 $\Rightarrow Q^{-1}AQ=E \Rightarrow A=E$

26、$A=B^2$

$Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

$B=Q^{-1}diag(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})Q$

32、$x^TA^TAx>0$

33、$AB=BA=(AB)^T$ 回去的任务.

记 $A=M^TM$，

$P^{-1}(M^{-1})^TBM^{-1}P=$

34、$A=M^TM$

$P^{-1}(M^T)^{-1}BM^{-1}P=diag(a_1,\cdots,a_n)$ 且 $P^{-1}(M^T)^{-1}AM^{-1}P=E$

35、$|xA-B|=0$, $A=M^TM$

$|xE-(M^T)^{-1}BM^{-1}|=0 \Rightarrow |xE-P^{-1}(M^T)^{-1}BM^{-1}P|=0 \Rightarrow P^{-1}(M^T)^{-1}BM^{-1}P=E \Rightarrow B=M^TM$

38、$\begin{pmatrix}-A_{11}&-A_{12}&\cdots&-A_{1n}\\-A_{21}&-A_{22}&\cdots&-A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-A_{n1}&-A_{n2}&\cdots&-A_{nn}\end{pmatrix}$ 是负定？ $=-A^*$ ✓