请配合"关于"食用

# 定积分

p215 $f$可积 $\rightarrow$ $|f|$可积 $\leftrightarrow$ $f^2$可积

1、分划$\pi$、介点集、Riemann和

2、Using 几何意义

3、反证 —— 找介点使 Riemann和发散

4、已有一个分划使和$<\varepsilon$，只需讨论区间们的端点、元素，有限个

证一下 Riemann函数 Riemann可积

$\forall \varepsilon>0$，$\exists p\in\mathbb{N}$，$\frac{1}{p}<\frac{\varepsilon}{2}$.

取分划为 $x_i\pm\delta$，$\delta=\frac{\varepsilon}{4k}$

$\sum w_i\Delta x_i<2\cdot\frac{\varepsilon}{4k}\times k+\frac{1}{p}<\varepsilon$

5、可积有界 easy but not trivial 证明常用

6、$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$

7、积分一中值要求$g(x)$不变号.

8、$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\le L|x-y|$ （Lipschitz条件）

9、$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

10、$\int_0^{\pi}$时可令 $x=\pi-t$

11、记一下结论 $I_n=J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ $\quad I_n=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n=2k\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} & n=2k-1\end{cases}$

12、$f\in R[a,b]$，$g$单调 then $\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\,dx+g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\,dx$ —— P226推论

13、Riemann引理 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

# 广义积分

1、Cauchy、Heine 举反例

2、比较 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f}{g}=l$ $\begin{cases}l=0\\0<l<+\infty\\l=+\infty\end{cases}$ 一般令 $g=\frac{1}{x^p}$，Taylor展开

3、A-D判别法 $\begin{cases}\text{单调有界}+\text{广义积分收敛} & (A)\\ \text{单调}\to 0+\text{积分有界} & (D)\end{cases}$

4、条件：$\frac{\sin x}{x}$，$\sin x^2$

绝对： $e^{\sin x}$有界 $\frac{\sin 2x}{x^x}$收敛

练手☆ $\int_1^{+\infty}e^{\sin x}\cdot\frac{\sin 2x}{x^x}\,dx$

放缩绝对值☆

5、$\underbrace{\int_0^{+\infty}f(x)\,dx\text{收敛}}_{\downarrow}$且恒正、连续 $\not\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ $\quad\frac{1}{x^2}+$"$\bigwedge$" 很窄 $\quad$ 很多反例

$f(x)$极限存在 or 单调 or 一致连续 or 导数有界

6、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}$；$\int_0^{+\infty}=\int_0^{A}+\int_A^{\infty}$

7、瑕积分的"$p$"相反

8、$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$，令 $\frac{x-1}{2}=\sin^2 t$

# 数项级数

1、$\arctan\frac{x-y}{1+xy}$ 的裂项

2、Cauchy：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}$：$\left|\sum\limits_{i=1}^{p}a_{n+i}\right|<\varepsilon$

3、括号内所有项符号相同

4、$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\le\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\le\underline{\lim}+\overline{\lim}\le\overline{\lim}(\quad)\le\overline{\lim}+\overline{\lim}$

5、$\underline{\lim}\ge\overline{\lim}\Rightarrow$收敛

6、$\underline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\underline{\lim}\sqrt[n]{x_n}\le\overline{\lim}\sqrt[n]{x_n}\le\overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}$

7、$\frac{1}{(n+1)^p}<\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{(n+1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right)$

8、比较：$\begin{cases}\lim\frac{a_n}{b_n}=l\\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\to\text{等比}\end{cases}$ $\quad\left(\text{if }\frac{a_{n+1}}{a_n}>1\text{，发散}\right)$

9、Cauchy $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\rho$，$\rho<1$ 与 $\rho>1$

10、D'Alembert (1) $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

(2) $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

11、Raabe. (1) $\exists r>1$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，有 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge r$ $\qquad\underline{\lim}\,n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r>1$

(2) $\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，有 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 1$ $\qquad\overline{\lim}\,n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r<1$

12、$f$非负单减，$a_n=f(n)$ $\sum a_n$与$\int f(x)\,dx$ 同敛散