数学分析

邱一航

数分 I

集合与映射

数列极限

函数极限与连续函数

微分

微分中值定理

不定积分

定积分

反常积分

数项级数.

集合与映射（9/14—9/16）

- 集合（至今没有明确精准定义）

  通常定义1. 具有某种特定性质的事物的总体. $\boxed{\text{简称“集”}}$

  事物：$\boxed{\text{元素}}$ $\boxed{\text{（“元”）}}$

  Cantor 发明

  $\boxed{\text{罗素悖论}}$

  空集 ϕ.

  记作 $a \in M$.（元素 $\in$ 集合）

  不属于：$a \notin M$. 或 $a \bar{\in} M$

  当 M 为数集时，用 $\boxed{M^+}$ 表示排除 0 和负数后的集合.

表示方法：

- 列举法 $A = \{a_1, \cdots a_n\} = \{a_i\}_{i=1}^{n}$ ；$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\} = \{n\}$.
- 描述法 $\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ 或 } -x \in \mathbb{N}^+\}$ $\quad \mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^+,\ (p,q)=1\}$.

$\boxed{\text{邻域}}$

点的 δ 邻域：a 的 δ 邻域为 $U(a, \delta) = (a-\delta, a+\delta)$ $\quad \{x \mid |x-a| < \delta\}$

去心 δ 邻域 $\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$

$\boxed{a:\text{中心}}$ $\quad$ $\boxed{\delta:\text{半径}}$

$\boxed{\text{子集；包含}}$ 有集合 A, B. $\forall x \in A$ 必有 $x \in B$. 则 $A \subset B$.

$\boxed{A \subset B \text{ 且 } B \subset A \Rightarrow A = B.}$

显然有 $A \subset A$. $A = A$. $\phi \subset A$. $\quad$ 传递性（[illegible]）$A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

“包含”是一个序关系

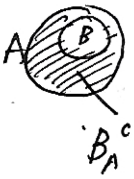
~~集~~交.

$\boxed{\text{集合运算}}$ 并集 $A\cup B$. 交集 $A\cap B$.

差集 $A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$

余集: $=A\setminus B$ (其中 $B\subset A$)

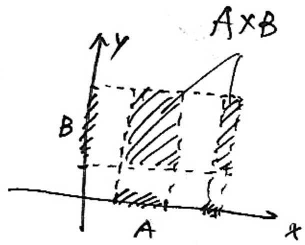
B_A^c ($\complement_A B$)



直积: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$

又称 笛卡尔乘积

二元集合

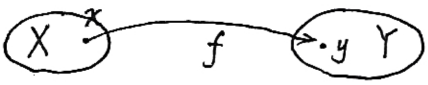


$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow{\text{记}}\mathbb{R}^2$ (整个平面) $\longrightarrow \mathbb{R}^3$: 整个空间

- 映射与函数

$\boxed{\text{映射}}$

设X、Y为两个非空集合. 若存在一个对应规则 f, s.t. $\forall x\in X$, 有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应, 则称 f 为从X到Y的映射. 记作: $f: X\to Y$.



× 有多个y对应 —— 集合映射.

y: x在f下的像. 记作 $y=f(x)$

x: y在f下的原像.

集合X为f的定义域, Y的子集 $R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ 为f的值域.

($\forall x\in X$!)

映射三要素 $\begin{cases}\text{定义域}\\ \text{对应规则}\\ \text{值域}\end{cases}$ 注意: x的像y唯一, y的原像不一定唯一

☆ 特别地, 称 f为满射: 当 $f(X)=Y$.

f为单射: $\forall x_1,x_2\in X$. $x_1\neq x_2$. 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$

f为双射或一一映射: f为满射也为单射

☆ 映射又称算子.

$X(\neq\phi)\xrightarrow{f} Y$ (数集) f称为 X上的 $\boxed{\text{泛函}}$

$X(\neq\phi)\xrightarrow{f} X$ f称为 X上的 $\boxed{\text{变换}}$

X (数集或点集) $\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ 实函数

X (------) $\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ 复函数

- 有限集、无限集、可列集

$\boxed{\text{有限集}}$（元素个数有限）：可以和数列集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 建立一一对应关系的集合.
（n 为给定的非负整数）

$\boxed{\text{无限集}}$：不是有限集的集合.

☆ 可以与它的真子集建立一一对应关系的集合.

$\boxed{\text{可列集}}$：可以与自然序列 $\{1,2,3,\cdots\}$ 建立一一对应关系的集合.　　＊可以数一数的
（可数集）　~~若集合是无限集~~，"不可列集"或"不可数集".

定理
$\boxed{\text{可列个可列集合的并集还是可列集.}}$ —— 证明：选取1个可列集合 a_1，可以作：

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots\cdots \end{array}$$

同样地，其余集合可排列为

$$\begin{array}{cccc} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots\cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

按照蓝线排列可形成一列.
故可列个可列集合的并集还是可列集

$\boxed{\text{有理数集合是可列集.}}$

证明：任一有理数可表示为 $\frac{p}{q}$.
p 的取值（$\mathbb{Z}$）是可列集.
q 的取值（$\mathbb{N}^+$）也是可列集
并集：可列集.

也可以
$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}$$

＊$\mathbb{Z}$ 是可列集：$0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\cdots$.

$\boxed{\text{无理数集合是不可列集；实数集合是不可列集}}$

- 函数

$\boxed{\text{函数}}$　设数集 $D\subset R$. 称 $f: D\rightarrow R$ 为函数　　记 $y=f(x)$，$x\in D$（定义域）
y：因变量　x：自变量　　$R_f=f(D)$：值域

函数图形：$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$

$\boxed{\text{定义域}}$　使表达式或实际问题有意义的自变量集合.

$\boxed{\text{函数的几种特性}}$　$\boxed{\text{有界函数}}$：$\forall x\in D$. $\exists M>0$ 使 $|f(x)|\leq M$. 称 $f(x)$.
$I\subset D$. $\cdots$ I　　- - -　　称 $f(x)$ 在 I 上有界

有界 $\Leftrightarrow$ 又有上界.又有下界.

$\boxed{\text{单调性}}$　$\forall x_1,x_2\in I$.（$I\subset D$）. $x_1\leq x_2$ 时 $f(x_1)\leq f(x_2)$
称 $f(x)$ 为 I 上单调增函数

一般不说明时，"单调"默认严格单调　　若去掉等号（$x_1<x_2$ —— $f(x_1)<f(x_2)$）　严格单调增函数